Examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

15 mai 2007

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculettes et téléphones interdits.

Ce sujet comporte deux pages. On rappelle que dans ce cours, toutes les matrices sont *à coefficients réels*.

Exercice 1 : On considère les points $A = (0, 1, 2)$ et $B = (4, 5, 4)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{S}$ la sphère dont le segment $[AB]$ est un diamètre.

a. Quel est le centre C de la sphère $\mathcal{S}$? Quel est son rayon ?

b. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ pour un point donné $M = (x, y, z)$.

d. En déduire un critère géométrique sur les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ pour que $M \in \mathcal{S}$.

e. Retrouver ce critère sans utiliser de coordonnées. [*Exprimer $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ en fonction des distances AC et CM.*]

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice A dans la base canonique.

On suppose que u et v sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 2 et -1.

a. Les vecteurs u et v peuvent-ils être colinéaires ? [*Justifier votre réponse.*]

b. Ecrire la matrice D de f dans la base u, v.

On considère maintenant le cas particulier où $u = (1, -1)$ et $v = (1, 3)$.

c. Vérifier que ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

d. Écrire la matrice de passage P associée à la base u, v et calculer son inverse P^{-1}.

e. Rappeler la relation existant entre A, D, P et en déduire la matrice A.

f. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A, puis expliquer le résultat obtenu.

Exercice 3 : Soit B une matrice carrée d'ordre 2. On appelle *racine carrée de B* toute matrice A telle que $A^2 = B$.

a. Montrer que si A est une racine carrée de B, alors A commute avec B.

b. Montrer que si B a une racine carrée, alors $\det B \geqslant 0$.

c. Donner un exemple de matrice qui n'a pas de racine carrée.

d. Donner un exemple de matrice qui a une infinité de racines carrées. [*Considérer les symétries axiales.*]

On considère le cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

e. Montrer que si A commute avec B, alors on peut exprimer les coefficients b et d en fonction de a et c.

f. Quelle est l'interprétation géométrique d'une telle matrice A ?

g. Quelles sont les racines carrées de B ?

On considère le cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

h. Montrer que si A commute avec B, alors on peut exprimer les coefficients b et d en fonction de a et c.

i. Montrer que si A est une racine carrée de B, alors $a = \pm 2c$.

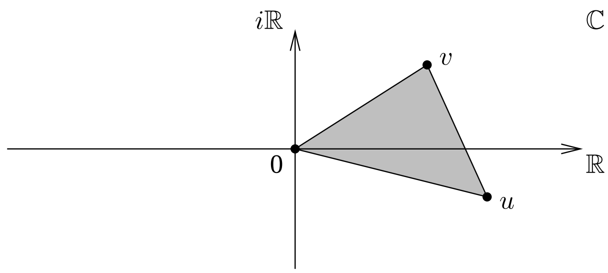
j. Quelles sont les racines carrées de B ?

Exercice 4 :

a. Donner une formule pour l'image de $z \in \mathbb{C}$ par chacune des transformations suivantes du plan complexe :

symétrie centrale, projection sur l'axe réel, symétrie par rapport à l'axe réel, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient u, v des complexes non nuls. On note $\Delta(u, v)$ le triangle défini par les points d'affixes respectives 0, u, v :



b. Dans le cas particulier où u est un réel positif, exprimer l'aire du triangle $\Delta(u, v)$ en fonction de u et $\mathfrak{Im}(v)$.

c. En déduire l'aire du triangle $\Delta(u\overline{u}, v\overline{u})$.

d. Quel est le facteur de changement d'aire de la similitude $z \mapsto z\overline{u}$?

e. En déduire une formule générale pour l'aire du triangle $\Delta(u, v)$.