Examen de calcul matriciel du 9 mai 2012
(MAT13, 2h, sans calculette ni document)

Rappel : la base canonique du plan $\mathbb{R}^2$ est notée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et celle de l'espace $\mathbb{R}^3$ est notée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1 : Soit $u = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Donner un vecteur unitaire u' qui soit colinéaire à u et de même sens que u.
2. Donner un vecteur v' tel que (u', v') soit une base orthonormée directe du plan.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(\vec{\imath}) = u'$ et $f(\vec{\jmath}) = v'$.

3. Écrire la matrice de f (dans la base canonique).
4. L'endomorphisme f préserve-t-il la norme d'un vecteur quelconque ?
5. Préserve-t-il l'orientation et l'aire d'un parallélogramme quelconque ?
6. De quel type de transformation géométrique du plan s'agit-il ?

Exercice 2 : Une matrice carrée d'ordre 2 est dite *élémentaire* si elle est de l'une des 4 formes suivantes, où le paramètre λ est un scalaire :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0, \quad N_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0, \quad P_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les interprétations géométriques des matrices M_{-1} et N_2 ?
2. Montrer que toute matrice élémentaire est inversible et que son inverse est une matrice élémentaire.
3. Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est le produit de 2 matrices élémentaires.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Donner une matrice élémentaire B telle que la première colonne de la matrice BA soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Donner une matrice élémentaire C telle que la matrice CBA soit de la forme P_λ.
6. En déduire que la matrice A est le produit de 3 matrices élémentaires.

Remarque : En introduisant une matrice élémentaire supplémentaire, à savoir $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on démontre que, plus généralement, toute matrice carrée d'ordre 2 inversible est le produit de 4 matrices élémentaires.

Exercice 3 : On considère les vecteurs $u = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $v = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $w = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Est-elle orthonormée ?
2. Écrire la matrice de passage P associée à cette base, et calculer P^{-1}.
   (Le choix de la méthode de calcul est laissé libre.)
3. Si un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice A (dans la base canonique), comment exprime-t-on sa matrice A' dans la base (u, v, w) ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice (dans la base canonique) est $S = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer la matrice S' de f dans la base (u, v, w).
   (On pourra utiliser les questions précédentes, ou bien calculer directement les images de u, v, w.)
5. En déduire les valeurs propres de f, et donner les sous-espaces propres associés.
   (Rappelons que le *sous-espace propre* associé à une valeur propre λ de f est $\mathcal{E}_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id})$.)
6. Donner une description géométrique de f.