Examen de seconde session

MAT13 - Calcul matriciel

20 juin 2005

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculettes et téléphones interdits.

Exercice 1 : Soient $u = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $v = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ où $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a. Construire un vecteur $w \neq 0$ tel que $u \perp w$ et $v \perp w$.
b. Quel est le volume du parallélépipède défini par les vecteurs u, v et w ?
c. Quelle est l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs u et v ?

Exercice 2 : Soient $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ les vecteurs de la base canonique du plan $\mathbb{R}^2$.
a. Quelle est la matrice A de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$?
b. Quelle est la matrice B de la symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$? [*Chercher les images de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$.*]
c. Quelle est la matrice C de l'affinité orthogonale de rapport a et d'axe $\mathbb{R}\vec{\imath}$?

Exercice 3 : Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.
a. Dessiner chacun des ensembles suivants :

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 1\}, \qquad \mathcal{B} = \{(2\lambda, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 = 0\}, \qquad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\}.$$

b. Quelle est l'interprétation géométrique de l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 2\}$?

Exercice 4 : On considère le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & \alpha \\ x + 2y + 3z & = & \beta \\ x + 3y + 6z & = & \gamma \end{array}\right.$$

a. Exprimer x, y, z en fonction de α, β, γ par la méthode de votre choix.
b. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.
c. Quelle est la matrice inverse A^{-1} ?

Exercice 5 : Montrer que si A est une matrice carrée d'ordre p symétrique, alors A^2 est aussi symétrique.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
a. La matrice A est-elle symétrique ?
b. Calculer les matrices A^2 et A^3, puis $A^3 - 4A^2 + 3A$.
c. Montrer que $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ est un vecteur propre de f, associé à une valeur propre que l'on précisera.
d. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A, puis ses valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$.
e. Construire des vecteurs propres associés v_1, v_2, v_3 qui soient unitaires (c'est-à-dire de norme 1).
f. Calculer les produits scalaires $v_1 \cdot v_2$, $v_1 \cdot v_3$, et $v_2 \cdot v_3$.
g. Calculer la matrice $V_1{}^tV_1 + V_2{}^tV_2 + V_3{}^tV_3$ où V_i est la matrice colonne du vecteur v_i pour $i = 1, 2, 3$.

Tournez SVP.

Exercice 7 : On se donne deux nombres réels a_0, b_0 et on considère les suites a_n et b_n définies par :

$$(E_n) \quad \begin{cases} a_{n+1} &= 6a_n - 2b_n, \\ b_{n+1} &= 6a_n - b_n, \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Pour $n \geqslant 0$, on définit la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Écrire (E_n) sous la forme $V_{n+1} = AV_n$ où A est une matrice carrée d'ordre 2.
b. Écrire V_n en fonction de A, n et V_0.
c. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
d. Donner des vecteurs propres associées à ces valeurs propres.
e. Écrire A sous la forme PDP^{-1} où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible.
f. Calculer D^n puis A^n pour $n \geqslant 0$.
g. En déduire une expression de a_n et b_n en fonction de n, a_0 et b_0 pour $n \geqslant 0$.

Exercice 8 : Soient $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ et $\gamma = \omega + \overline{\omega}$.
a. Calculer le complexe ω^5.
b. Représenter les points d'affixes respectives $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ dans le plan complexe.
[*On ne demande pas une construction à la règle et au compas, mais seulement un dessin approximatif.*]
c. Montrer que $\overline{\omega} = \omega^4$ et $\overline{\omega}^2 = \omega^3$.
d. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
e. En déduire la valeur de $\gamma^2 + \gamma$.
f. Exprimer γ en fonction de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et donner son signe.
g. En déduire une valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$.