Examen de calcul matriciel du 18 juin 2012
(MAT13, 2h, sans calculette ni document)

Exercice 1 : Dans cet exercice, u est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Si v est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, pour quelle valeur de λ a-t-on $\langle u, v - \lambda u\rangle = 0$?
2. En déduire la formule du projeté orthogonal de v sur l'axe $\mathbb{R}u$.

On suppose que $u = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et on considère la *projection orthogonale* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sur l'axe $\mathbb{R}u$.

3. Calculer la matrice A de f (dans la base canonique).
4. Calculer la matrice A^2 et le scalaire $\det A$.
5. Donner une interprétation géométrique des réponses à la question précédente.
6. Trouver un vecteur unitaire u' qui soit colinéaire à u et de même sens que u.
7. Trouver un vecteur v' tel que (u', v') soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.
8. Exprimer $f(u')$ et $f(v')$ en fonction de u' et v', et en déduire la matrice A' de f dans cette base.

Exercice 2 : Dans cet exercice, $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{I}$ désigne la matrice identité en dimension 3.

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ c' & d' & 0 \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$ où a, b, c, d, x, y, z et a', b', c', x', y', z' sont donnés.

1. Calculer la matrice MM'.
2. Montrer que la matrice M a un inverse de la forme M' si et seulement si la matrice $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et $z \neq 0$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Calculer la matrice $M_\lambda = A - \lambda\mathbf{I}$ où λ est un réel quelconque.
4. Rappeler la condition nécessaire et suffisante pour que λ soit une valeur propre de A.
5. En déduire les valeurs propres de A.
   (On pourra développer $\det M_\lambda$, ou bien appliquer le résultat de la question 2, en admettant le fait que si une matrice de la forme M est inversible, alors son inverse est de la même forme.)
6. Calculer les sous-espaces propres correspondants.
7. La matrice A est-elle diagonalisable ? Pourquoi ?