

Corrigé de l'interrogation écrite du 7 février 2012

Questions de cours

1. Une base du plan est un couple (u, v) de vecteurs du plan tels que $u \nparallel v$.
2. La décomposition d'un vecteur w dans cette base est : $w = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est : $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.
4. On a égalité si et seulement si $u \parallel v$.

Exemples

1. $\|u\| = \sqrt{5}$.
2. Les vecteurs unitaires qui sont colinéaires à u sont $\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$ et $-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.
3. Le vecteur $2\vec{i} + \vec{j}$ est non nul et orthogonal à u .
4. Les vecteurs unitaires qui sont orthogonaux à u sont $\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$ et $-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

Démonstrations

1. Supposons que $u \nparallel v$, et montrons que $\mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v = \{\vec{0}\}$.
On a $\vec{0} = 0u = 0v \in \mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v$, donc $\{\vec{0}\} \subset \mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v$.
Réciproquement, soit $w \in \mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v$. Alors on a $w = \lambda u = \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $u = \frac{\mu}{\lambda}v \in \mathbb{R}v$, d'où $u \parallel v$: contradiction.
Donc $\lambda = 0$ et $w = 0u = \vec{0}$, d'où $\mathbb{R}u \cap \mathbb{R}v \subset \{\vec{0}\}$. **C.q.f.d.**
2. Supposons que $u \parallel v$ et $u \perp v$.
Comme $u \parallel v$, on a un vecteur w et des scalaires λ, μ tels que $u = \lambda w$ et $v = \mu w$.
Comme $u \perp v$, on a $0 = \langle u, v \rangle = \langle \lambda w, \mu w \rangle = \lambda \mu \|w\|^2$.
Si $u, v \neq \vec{0}$, alors $\lambda, \mu \neq 0$, d'où $\|w\| = 0$, c'est-à-dire $w = \vec{0}$, d'où $u = \lambda \vec{0} = \vec{0}$: contradiction.
Donc $u = \vec{0}$ ou $v = \vec{0}$. **C.q.f.d.**