

Calcul matriciel : devoir surveillé du 11 février 2012 (sans document)

Dans ces exercices, on considère des vecteurs du plan.

Exercice 1 : Soient $u = \vec{i} + \vec{j}$ et $v = \vec{i} - \vec{j}$. On considère un vecteur quelconque $w = x\vec{i} + y\vec{j}$.

1. Quelles sont les composantes du vecteur w ?
2. Quelles sont les composantes du vecteur $\lambda u + \mu v$?
3. En déduire les composantes λ, μ du vecteur w dans la base (u, v) .

Exercice 2 : Soient P et Q les points de coordonnées respectives $0, -1$ et $0, 1$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan. On considère un point quelconque R de coordonnées x, y dans ce même repère.

1. Calculer les vecteurs $u = \overrightarrow{PR}$ et $v = \overrightarrow{QR}$.
2. Calculer les scalaires $\langle u, v \rangle$, $\|u\|^2$ et $\|v\|^2$.
3. En déduire une équation cartésienne de l'ensemble \mathcal{C} des points R tels que $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QR}$.
4. En déduire une équation cartésienne de l'ensemble \mathcal{D} des points R tels que $d(P, R) = d(Q, R)$.
5. Quelles sont les interprétations géométriques de ces résultats ?

Exercice 3 : Soient u, v des vecteurs quelconques.

1. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ces deux vecteurs.
2. Ecrire l'inégalité triangulaire pour ces deux vecteurs.
3. Développer $\|u + v\|^2$ et $(\|u\| + \|v\|)^2$.
4. Déduire l'inégalité triangulaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Dans quel cas l'inégalité triangulaire devient-elle une égalité ?

Exercice 4 : Donner des exemples de bases :

1. une qui soit orthonormée directe ;
2. une qui soit orthonormée indirecte ;
3. une qui soit orthogonale, mais qui ne soit pas orthonormée ;
4. une qui ne soit pas orthogonale ;
5. une qui soit formée de vecteurs unitaires, mais qui ne soit pas orthogonale.

Exercice 5 : Soit $u = a\vec{i} + b\vec{j}$ un vecteur non nul, et soit v tel que $u \perp v$, $\|u\| = \|v\|$ et $\det(u, v) > 0$.

1. Calculer les composantes du vecteur v .
2. Quelle transformation géométrique fait passer de u à v ?
3. Que peut-on conclure dans le cas particulier où u est unitaire ?
4. En déduire la forme générale d'une *base orthonormée directe*.
5. En déduire de même la forme générale d'une *base orthonormée directe*.