Calcul matriciel : devoir surveillé du 17 mars 2012 (sans document)

Dans ces exercices, toutes les matrices sont à coefficients réels.

Exercice 1 :

a. Donner un exemple de matrice $A \neq \mathbf{O}$ telle que $A^2 = \mathbf{O}$.

b. Donner des matrices A, B telles que $AB \neq BA$.

Exercice 2 : Soit B une matrice carrée d'ordre 2. On appelle *racine carrée de* B toute matrice A telle que $A^2 = B$.

a. Montrer que si A est une racine carrée de B, alors A commute avec B.

b. Si B a une racine carrée, alors que peut-on dire de son déterminant ?

c. Donner un exemple de matrice qui n'a pas de racine carrée.

d. Montrer que la matrice $\mathbf{I}$ a une infinité de racines carrées.

On considère maintenant la matrice $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e. Quelle est la forme générale des matrices qui commutent avec R ?

f. Calculer le carré d'une telle matrice.

g. Quelles sont les racines carrées de R ?

h. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 3 : On suppose que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est *additive*, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété suivante quels que soient les vecteurs u, v :

$$f(u+v) = f(u) + f(v).$$

a. Montrer qu'on a alors $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

b. En déduire que $f(-u) = -f(u)$ pour tout vecteur u.

c. Montrer que $f(nu) = nf(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout vecteur u.

d. En déduire que $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ et pour tout vecteur u.