Calcul matriciel : examen partiel du 6 mars 2012 (sans document)

Questions de cours

Dans la suite, A, B désignent des matrices, u, v des vecteurs, et λ un scalaire.

1. Parmi les objets suivants, lesquels sont des *matrices*, des *vecteurs*, des *scalaires* ?

$$A + B, \qquad u + v, \qquad AB, \qquad Au, \qquad \lambda A, \qquad \lambda u, \qquad \langle u, v\rangle, \qquad \det(u, v).$$

2. Quelle est l'interprétation géométrique de $\langle u, u\rangle$?
3. Pour être un *endomorphisme*, quelles propriétés doit satisfaire une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?
4. Si A est la matrice d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, quelles sont les colonnes de A ?

Exercice 1 : Soient P, Q, R trois points quelconques du plan.

1. Exprimer l'aire du triangle PQR en fonction des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
2. Montrer que cette formule donne le même résultat si on échange P avec Q, ou si on échange Q avec R.

Exercice 2 : On pose $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On considère une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Calculer les matrices S^2 et R^2.
2. Donner une interprétation géométrique de ces résultats.
3. Calculer les matrices SA et AS, puis en déduire la forme générale des matrices qui commutent avec S.
4. Calculer les matrices RA et AR, puis en déduire la forme générale des matrices qui commutent avec R.
5. En déduire la forme générale des matrices qui commutent avec toutes les autres.

Exercice 3 : Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme de matrice $\mathbf{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $f_\alpha(\vec{\imath})$ et $f_\alpha(\vec{\jmath})$ forment une *base orthonormée directe*.
2. Calculer $f_\alpha(u)$, $\|u\|^2$, $\|f_\alpha(u)\|^2$, $\langle u, f_\alpha(u)\rangle$ et $\det(u, f_\alpha(u))$ pour un vecteur quelconque $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
3. En déduire l'angle orienté des vecteurs u et $f_\alpha(u)$ dans le cas où $u \neq \vec{0}$.
4. En déduire que $\mathbf{R}_\alpha$ est la matrice d'une rotation, dont on précisera l'angle et le centre.
5. Calculer le produit $\mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorphisme qui *préserve l'orthogonalité*. Autrement dit, si u, v sont des vecteurs quelconques, on a $u \perp v$ si et seulement si $f(u) \perp f(v)$.

1. Si u, v sont des vecteurs quelconques, exprimer $\langle u + v, u - v\rangle$ en fonction de $\|u\|$ et $\|v\|$.
2. En déduire que les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ sont orthogonaux, non nuls, et de même norme.