# Calcul matriciel : corrigé de l'examen partiel du 6 mars 2012

**Questions de cours**

1. $A+B$, $AB$ et $\lambda A$ sont des *matrices* ;
   $u+v$, $Au$ et $\lambda u$ sont des *vecteurs* ;
   $\langle u,v\rangle$ et $\det(u,v)$ sont des *scalaires*.
2. $\langle u,u\rangle = \|u\|^2$ où $\|u\|$ est la *norme* de $u$, c'est-à-dire sa *longueur*.
3. Pour être un *endomorphisme*, l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ doit satisfaire les propriétés suivantes (*linéarité*) :
$$f(u+v)=f(u)+f(v), \qquad f(\lambda u)=\lambda f(u).$$
4. Si $A$ est la matrice d'un endomorphisme $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, les colonnes de $A$ sont les vecteurs $f(\vec\imath)$ et $f(\vec\jmath)$.

**Exercice 1** :

1. L'aire du triangle $PQR$ est $\dfrac{|\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})|}{2}$.
2. Si on échange $Q$ avec $R$, on obtient le même résultat car on a : $\det(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PQ}) = -\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$.
   Si on échange $P$ avec $Q$, on obtient aussi le même résultat car on a :
$$\det(\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR}) = \det(\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}) = \det(\overrightarrow{QP},\overrightarrow{PR}) = \det(-\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = -\det(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}).$$

**Exercice 2** :

1. On a $S^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{I}$ et $R^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-\mathbf{I}$.
2. On a $S^2=\mathbf{I}$ car $S$ est la matrice d'une symétrie axiale, et $R^2=-\mathbf{I}$ car $R$ est la matrice de la rotation de $\frac{\pi}{2}$.
3. On a $SA=\begin{pmatrix}c&d\\a&b\end{pmatrix}$ et $AS=\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}$. Ces matrices sont égales lorsque $a=d$ et $b=c$.

   La forme générale des matrices qui commutent avec $S$ est donc $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$.
4. On a $RA=\begin{pmatrix}-c&-d\\a&b\end{pmatrix}$ et $AR=\begin{pmatrix}b&-a\\d&-c\end{pmatrix}$. Ces matrices sont égales lorsque $a=d$ et $b=-c$.

   La forme générale des matrices qui commutent avec $R$ est donc $\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$.
5. Si $A$ commute avec toutes les matrices, elle commute avec $S$ et $R$ : elle est donc de la forme $\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}=a\mathbf{I}$.
   Réciproquement, une telle matrice commute avec toutes les autres, car on a $(a\mathbf{I})B=aB=B(a\mathbf{I})$.

**Exercice 3** :

1. On a $f_\alpha(\vec\imath)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ et $f_\alpha(\vec\jmath)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$, d'où $\langle f_\alpha(\vec\imath),f_\alpha(\vec\jmath)\rangle = -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0$.
   De plus, on a $\|f_\alpha(\vec\imath)\|^2=\|f_\alpha(\vec\jmath)\|^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ et $\det(f_\alpha(\vec\imath),f_\alpha(\vec\jmath))=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha>0$.
   Autrement dit, les vecteurs $f_\alpha(\vec\imath)$ et $f_\alpha(\vec\jmath)$ forment une *base orthonormée directe*.
2. Pour $u=x\vec\imath+y\vec\jmath=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, on a $f_\alpha(u)=\begin{pmatrix}x\cos\alpha-y\sin\alpha\\x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{pmatrix}$. On a donc :
$$\|f_\alpha(u)\|^2 = x^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+y^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+2xy(-\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha) = x^2+y^2=\|u\|^2.$$
$$\begin{cases}\langle u,f_\alpha(u)\rangle = x^2\cos\alpha-xy\sin\alpha+yx\sin\alpha+y^2\cos\alpha=(x^2+y^2)\cos\alpha\\ \det(u,f_\alpha(u)) = x^2\sin\alpha+xy\cos\alpha-yx\cos\alpha+y^2\sin\alpha=(x^2+y^2)\sin\alpha.\end{cases}$$

3. Si $u \neq \vec{0}$, le cosinus et le sinus de l'angle orienté des vecteurs $u$ et $f_\alpha(u)$ sont donc respectivement :

$$\frac{\langle u, f_\alpha(u)\rangle}{\|u\|\|f_\alpha(u)\|} = \frac{\langle u, f_\alpha(u)\rangle}{x^2+y^2} = \cos\alpha, \qquad \frac{\det(u, f_\alpha(u))}{\|u\|\|f_\alpha(u)\|} = \frac{\det(u, f_\alpha(u))}{x^2+y^2} = \sin\alpha.$$

   Autrement dit, cet angle est $\alpha$.
4. Comme de plus, le vecteurs $u$ et $f_\alpha(u)$ ont la même norme, on en déduit que $\mathbf{R}_\alpha$ est la matrice de la rotation d'angle $\alpha$ autour de l'origine $O$.
5. $\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$

   Autrement dit, on a $\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}_{\alpha+\beta}$, ce qui correspond bien à l'interprétation géométrique de $\mathbf{R}_\alpha$.

**Exercice 4** : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un endomorphisme qui *préserve l'orthogonalité*. Autrement dit, si $u, v$ sont des vecteurs quelconques, on a $u \perp v$ si et seulement si $f(u) \perp f(v)$.

1. Si $u, v$ sont des vecteurs quelconques, on a $\langle u+v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.
2. Comme $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, on a $f(\vec{\imath}) \perp f(\vec{\jmath})$, et comme $\vec{\imath} + \vec{\jmath} \perp \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, on a aussi $f(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \perp f(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, c'est-à-dire $0 = \langle f(\vec{\imath}+\vec{\jmath}), f(\vec{\imath}-\vec{\jmath})\rangle = \langle f(\vec{\imath}) + f(\vec{\jmath}), f(\vec{\imath}) - f(\vec{\jmath})\rangle = \|f(\vec{\imath})\|^2 - \|f(\vec{\jmath})\|^2$ d'après la formule ci-dessus.
   On a donc $\|f(\vec{\imath})\| = \|f(\vec{\jmath})\|$.
   Enfin, si on avait $f(\vec{\imath}) = \vec{0}$, alors on aurait $f(\vec{\imath}) \perp f(\vec{\imath})$, d'où $\vec{\imath} \perp \vec{\imath}$ : contradiction.
   Donc $f(\vec{\imath}) \neq \vec{0}$, et de même, $f(\vec{\jmath}) \neq \vec{0}$. Ainsi, $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ sont orthogonaux, non nuls, et de même norme.