1 Calcul vectoriel dans le plan et dans l'espace

1.1 Vecteurs du plan

Définitions : Dans ce chapitre :

- un *scalaire* est un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$;
- un *vecteur du plan* est un couple u de scalaires x, y, noté de la façon suivante : $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- les *composantes* (ou *coordonnées*) du vecteur u sont les scalaires x, y ;
- l'ensemble de ces vecteurs du plan est noté $\mathbb{R}^2$.

Remarques :

- Dans la littérature, on écrit souvent $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$: ici, on notera plutôt le vecteur u comme une *colonne*.
- Son *interprétation géométrique* est le *point* P de coordonnées x, y dans un *repère orthonormé direct* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
- En fait, on représente plutôt ce vecteur par une *flèche* joignant l'*origine* O au point P, et on écrit $u = \overrightarrow{OP}$.
- On peut alors *translater* cette flèche, de telle sorte que le vecteur reste lui-même inchangé : $u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}$. Ces deux flèches ont ainsi même *direction*, même *sens*, et même *longueur* : $OPRQ$ est un *parallélogramme*.
- Dans la littérature, un vecteur quelconque est parfois noté $\vec{u}$. Ici, on le notera simplement u.

Exemples : On introduit le *vecteur nul* $\vec{o}$ et les deux vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ de la *base canonique* de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Dans la littérature, on écrit parfois 0 pour $\vec{o}$. Ici, on note différemment le scalaire nul et le vecteur nul.

Définitions : La *somme de deux vecteurs* et le *produit d'un vecteur par un scalaire* sont définis de façon évidente :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Remarque : Le scalaire est placé *avant* le vecteur : on écrit λu, et non $u\lambda$. Dans la littérature, on écrit aussi $\lambda \cdot u$.

Exercice 1 : Calculer le vecteur $x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Remarque : Dans la suite, on écrira souvent $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ au lieu de $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 1 (règles du *calcul vectoriel*)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ, μ sont des scalaires, on a les identités suivantes :

$$u + v = v + u, \qquad (u + v) + w = u + (v + w),$$

$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \qquad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \qquad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \qquad 0u = \vec{o}, \qquad 1u = u.$$

Autrement dit, la somme de deux vecteurs est *commutative* et *associative*, le produit d'un vecteur par un scalaire est *associatif* et *distributif* (*à droite* et *à gauche*) sur la somme, le scalaire 0 est *absorbant* et le scalaire 1 est *neutre*.

Démonstration : On montre la *commutativité* de la somme de vecteurs de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x \\ y' + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De même, on montre les autres identités en se ramenant à un calcul sur les composantes. ■

Remarques :

- La somme $(u + v) + w = u + (v + w)$ s'écrit $u + v + w$. De même, le produit $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ s'écrit $\lambda\mu u$. Plus généralement, la somme $u_1 + \cdots + u_n$ s'écrit sans parenthèses, et de même pour le produit $\lambda_1 \cdots \lambda_n u$.
- Certaines règles font intervenir à la fois des opérations sur les scalaires et des opérations sur les vecteurs. Par exemple, la troisième règle (*distributivité à droite*) fait intervenir à la fois la somme $\lambda + \mu$ *de scalaires* et la somme $\lambda u + \mu u$ *de vecteurs*. Bien entendu, on utilise les règles habituelles pour le calcul sur les scalaires.
- Toutes ces règles sont évidentes et faciles à utiliser : ce sont essentiellement les mêmes que pour les scalaires. La particularité du calcul vectoriel est la suivante : on ne peut ni multiplier, ni diviser, un vecteur par un autre. Mais on peut diviser un vecteur u par un scalaire $\lambda \neq 0$, en le multipliant par $\frac{1}{\lambda}$: on écrit alors $\frac{1}{\lambda}u$, et non $\frac{u}{\lambda}$.

Notations : On écrit $-u$ pour le vecteur $(-1)u$, et $u-v$ pour le vecteur $u+(-v)=u+(-1)v$.
Remarque : On a les identités suivantes :

$$-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

1. Donner la formule pour $\overrightarrow{PQ}$ si P est l'interprétation géométrique du vecteur u et Q est elle du vecteur v.
2. Exprimer les vecteurs $-u$, $u-v$, $v-u$ en fonction des points O, P, Q sachant que $u=\overrightarrow{OP}$ et $v=\overrightarrow{OQ}$.

Proposition 2 (règles *dérivées*)
Si u est un vecteur et λ est un scalaire, on peut déduire les identités suivantes des règles du calcul vectoriel :

$$u+\vec{o}=u, \qquad u-u=\vec{o}, \qquad \lambda\vec{o}=\vec{o}.$$

Démonstration : En appliquant la règle $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$ au cas où $\lambda=1$ et $\mu=0$, puis $\lambda=1$ et $\mu=-1$, on obtient $u+\vec{o}=1u+0u=(1+0)u=1u=u$, puis $u-u=1u+(-1)u=(1+(-1))u=0u=\vec{o}$. De même, en appliquant la règle $(\lambda\mu)u=\lambda(\mu u)$ au cas où $\mu=0$, on obtient $\lambda\vec{o}=\lambda(0u)=(\lambda 0)u=0u=\vec{o}$. ■

Remarques :

- On pourrait aussi démontrer ces identités directement, en se ramenant à un calcul sur les composantes, mais il vaut mieux les déduire des règles du calcul vectoriel, car ce calcul s'appliquera à d'autres types de vecteurs.
- Dans la littérature, l'*opposé* $-u$ est considéré comme une opération à part entière : les identités $u+\vec{o}=u$ et $u+(-u)=\vec{o}$ sont alors des règles à part entière, tandis que $0u=\vec{o}$ et $(-1)u=-u$ sont des règles dérivées.

Exercice 3 : Déduire les identités suivantes de la proposition 1 :

$\boxed{(u+v)-w= \qquad\qquad}$ $\boxed{\vec{o}-u= \qquad}$ $\boxed{-(-u)= \qquad}$

$\boxed{(-\lambda)u= \qquad\qquad =\lambda(-u),}$ $\boxed{(\lambda-\mu)u= \qquad\qquad}$ $\boxed{\lambda(u-v)= \qquad\qquad}$

Proposition 3 (règles de *simplification*)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ est un scalaire, on peut déduire les énoncés suivants des règles du calcul vectoriel :

si $u+w=v+w$, alors $u=v$, si $u+v=\vec{o}$, alors $u=-v$, si $u-v=\vec{o}$, alors $u=v$,
si $\lambda u=\vec{o}$ avec $\lambda\neq 0$, alors $u=\vec{o}$, si $\lambda u=\vec{o}$ avec $u\neq\vec{o}$, alors $\lambda=0$.

Démonstration : On utilise les propositions 1 et 2, ainsi que l'exercice 3 :

- Si $u+w=v+w$, alors $u=u+\vec{o}=u+(w-w)=(u+w)-w=(v+w)-w=v+(w-w)=v+\vec{o}=v$.
- Si $u+v=\vec{o}$, alors $u=u+\vec{o}=u+(v-v)=(u+v)-v=\vec{o}-v=-v$.
- Si $u-v=\vec{o}$, c'est-à-dire si $u+(-v)=\vec{o}$, alors $u=-(-v)=v$ par la règle précédente.
- Si $\lambda u=\vec{o}$ avec $\lambda\neq 0$, alors $u=1u=(\frac{1}{\lambda}\lambda)u=\frac{1}{\lambda}(\lambda u)=\frac{1}{\lambda}\vec{o}=\vec{o}$.
- Enfin, si $\lambda u=\vec{o}$ avec $u\neq\vec{o}$, on montre $\lambda=0$ *par l'absurde* : si $\lambda\neq 0$, alors $u=\vec{o}$ par la règle précédente, d'où une contradiction avec l'hypothèse $u\neq\vec{o}$. ■

Exercice 4 : En déduire les deux règles de simplification suivantes :

si $\lambda u=\lambda v$ avec $\lambda\neq 0$, alors $\boxed{\qquad}$ si $\lambda u=\mu u$ avec $u\neq\vec{o}$, alors $\boxed{\qquad}$

Définition : La *translation de vecteur* u est l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(v)=u+v$ pour tout $v\in\mathbb{R}^2$.

Remarque : L'interprétation géométrique de cette application est la transformation suivante du plan :

si $v=\overrightarrow{OP}$, alors $f(v)=\overrightarrow{OQ}$ où Q est l'unique point tel que $\overrightarrow{PQ}=u$.

Exercice 5 : Démontrer les propriétés suivantes, en précisant le vecteur associé à chaque translation :

1. l'*identité* $\mathrm{id}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, définie par $\mathrm{id}(u)=u$ pour tout $u\in\mathbb{R}^2$, est une translation ;
2. si $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sont les translations de vecteurs respectifs u et v, alors leur *composée* $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, définie par $(f\circ g)(w)=f(g(w))$ pour tout $w\in\mathbb{R}^2$, est une translation, et on a $f\circ g=g\circ f$;
3. la translation $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de vecteur u est *bijective*, et sa *réciproque* $f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, définie par $f^{-1}(v)=u$ où $u\in\mathbb{R}^2$ est l'unique vecteur tel que $f(u)=v$, est une translation.

1.2 Droites vectorielles et colinéarité

Notation : Si u est un vecteur, on pose $\mathbb{R}u = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Autrement dit, cet ensemble est défini par le *système d'équations paramétriques* suivant :

$\left\{\begin{array}{l} x = a\lambda, \\ y = b\lambda, \end{array}\right.$ où les *coefficients* a, b sont les composantes du vecteur $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, et λ est le *paramètre*.

Remarque : On peut toujours changer le nom du paramètre : dans la littérature, on utilise souvent t à la place de λ. En fait, on *doit* changer le nom du paramètre lorsque celui-ci est déjà utilisé : sinon, on commet une grave erreur ! Par exemple, si λ est un scalaire donné, on a $\mathbb{R}(\lambda u) = \{\mu\lambda u \mid \mu \in \mathbb{R}\}$, et non $\mathbb{R}(\lambda u) = \{\lambda^2 u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 6 : Donner les interprétations géométriques des ensembles suivants :

$$\mathbb{R}\vec{o}, \qquad \mathbb{R}\vec{\imath}, \qquad \mathbb{R}(-\vec{\imath}), \qquad \mathbb{R}\vec{\jmath}, \qquad \mathbb{R}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}), \qquad \mathbb{R}(\vec{\imath}-\vec{\jmath}), \qquad \mathbb{R}(\lambda\vec{\imath}), \qquad \{\lambda^2\vec{\imath} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 7 : Démontrer les propriétés suivantes pour un vecteur quelconque u :

$\vec{o}, u \in \mathbb{R}u$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}u$, alors $\lambda v \in \mathbb{R}u$, si $v, w \in \mathbb{R}u$, alors $v+w \in \mathbb{R}u$, si $v \in \mathbb{R}u$, alors $\mathbb{R}v \subset \mathbb{R}u$.

Remarque : Si $u = \overrightarrow{OP} \neq \vec{o}$, alors $O \neq P$, et l'interprétation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}u$ est la droite (OP).

Définition : Si u est un vecteur non nul, alors l'ensemble $\mathbb{R}u$ est appelé la *droite vectorielle engendrée par* u.

Proposition 4 (*générateur* d'une droite vectorielle)
Si u est un vecteur non nul, alors tout vecteur $v \in \mathbb{R}u$ s'écrit *de façon unique* sous la forme $v = \lambda u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et de plus, les trois conditions suivantes sont équivalentes pour un vecteur quelconque v :

1. $\mathbb{R}v = \mathbb{R}u$; 2. $v \in \mathbb{R}u$ et $v \neq \vec{o}$; 3. v est de la forme λu avec $\lambda \neq 0$.

Démonstration : Par définition, tout $v \in \mathbb{R}u$ est de la forme λu, et λ est unique d'après l'exercice 4, car $u \neq \vec{o}$.
De plus, si v est un vecteur quelconque, on démontre les trois implications 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.

- Si $\mathbb{R}v = \mathbb{R}u$, alors $v \in \mathbb{R}v = \mathbb{R}u$, et $v \neq \vec{o}$, car sinon, on aurait $u \in \mathbb{R}u = \mathbb{R}\vec{o}$, d'où $u = \vec{o}$: contradiction.
- Si $v \in \mathbb{R}u$ et $v \neq \vec{o}$, alors v est de la forme λu avec $\lambda \neq 0$, car sinon, on aurait $v = 0u = \vec{o}$: contradiction.
- Si $v = \lambda u$ avec $\lambda \neq 0$, alors $v \in \mathbb{R}u$, d'où $\mathbb{R}v \subset \mathbb{R}u$ d'après l'exercice 7.
  Comme $\lambda \neq 0$, on a aussi $u = \frac{1}{\lambda}v$, d'où l'*inclusion réciproque* $\mathbb{R}u \subset \mathbb{R}v$. Autrement dit, on a $\mathbb{R}v = \mathbb{R}u$. ■

Définition : Si une de ces trois conditions équivalentes est satisfaite, on dit que v est un *générateur* de la droite $\mathbb{R}u$.

Proposition 5 (droite vectorielle du plan définie par une *équation cartésienne*)
Si les scalaires a, b sont *non tous nuls*, c'est-à-dire si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors l'*équation cartésienne* $ax + by = 0$ définit la droite vectorielle $\mathbb{R}u$ engendrée par le vecteur $u = b\vec{\imath} - a\vec{\jmath} \neq \vec{o}$.

Remarque : Ce « ou » n'est pas *exclusif* : on peut bien sûr avoir $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$.

Démonstration : On pose $u = b\vec{\imath} - a\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{o}$. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque du plan.

- Si $v = \lambda u \in \mathbb{R}u$, alors $x = \lambda b$ et $y = -\lambda a$, d'où $ax + by = a(\lambda b) + b(-\lambda a) = \lambda(ab - ba) = 0$.
- Réciproquement, si $ax + by = 0$, il y a deux cas : $\left\{\begin{array}{l} \text{si } a \neq 0, \text{ alors } x = \frac{-by}{a}, \text{ d'où } v = \lambda u \text{ avec } \lambda = \frac{-y}{a}, \\ \text{si } b \neq 0, \text{ alors } y = \frac{-ax}{b}, \text{ d'où } v = \lambda u \text{ avec } \lambda = \frac{-x}{b}. \end{array}\right.$

Ainsi, $\mathbb{R}u$ est l'ensemble des vecteurs $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $ax + by = 0$. ■

Exercice 8 : Expliciter les cas particuliers suivants de la proposition 5 :

$$a = 0 \text{ et } b = 1, \qquad a = 1 \text{ et } b = 0, \qquad a = b = 1, \qquad a = 1 \text{ et } b = -1, \qquad a = b = 0.$$

Exercice 9 : Réciproquement, quelle est l'équation cartésienne de la droite $\mathbb{R}u$ pour $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \neq \vec{o}$?

Remarque : Une droite quelconque, aussi appelée *droite affine*, a une équation cartésienne de la forme $ax+by = c$. Dans le cas d'une droite vectorielle, le *coefficient constant* c est nul : on dit alors que cette équation est *homogène*.

Proposition 6 (*colinéarité* de deux vecteurs)
Si u, v sont des vecteurs, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $u = \vec{o}$ ou $v \in \mathbb{R}u$; 2. il existe un vecteur w tel que $u, v \in \mathbb{R}w$;
3. il existe des scalaires λ, μ *non tous nuls* tels que $\lambda u + \mu v = \vec{o}$.

Démonstration : On démontre les trois implications $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$

- Supposons 1. Il y a deux cas : $\begin{cases} \text{si } u = \vec{o}, \text{ alors } u, v \in \mathbb{R}v \text{ d'après l'exercice 7,} \\ \text{si } v \in \mathbb{R}u, \text{ alors } u, v \in \mathbb{R}u \text{ d'après l'exercice 7.} \end{cases}$ On a donc 2.
- Supposons 2. Autrement dit, on a un vecteur w et des scalaires λ, μ tels que $u = \lambda w$ et $v = \mu w$.
  Il y a deux cas : $\begin{cases} \text{si } \lambda = \mu = 0, \text{ alors } u = v = \vec{o}, \text{ d'où } 1u + 1v = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}, \\ \text{sinon, on a } \mu u - \lambda v = (\mu\lambda - \lambda\mu)w = \vec{o} \text{ avec } \mu, -\lambda \text{ non tous nuls.} \end{cases}$ On a donc 3.
- Supposons 3. Autrement dit, on a des scalaires λ, μ non tous nuls tels que $\lambda u + \mu v = \vec{o}$.
  Il y a deux cas : $\begin{cases} \text{si } \mu = 0, \text{ alors } \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda u = \lambda u + \vec{o} = \lambda u + \mu v = \vec{o}, \text{ d'où } u = \vec{o}, \\ \text{si } \mu \neq 0, \text{ alors } v = -\frac{\lambda}{\mu} u \in \mathbb{R}u. \end{cases}$ On a donc 1. ■

Définitions : Si une de ces trois conditions équivalentes est satisfaite, on dit que les vecteurs u, v sont *colinéaires*, et on écrit $u \parallel v$. Sinon, on dit que les vecteurs u, v sont *linéairement indépendants*, et on écrit $u \nparallel v$.

Remarques :

- On peut supposer $w \neq \vec{o}$ dans la deuxième condition, car on a $\mathbb{R}\vec{o} \subset \mathbb{R}w$ pour n'importe quel vecteur w. Autrement dit, deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils appartiennent à une même droite vectorielle.
- Par définition, le vecteur $\vec{o}$ est colinéaire à tous les autres, et pour $u \neq \vec{o}$, on a $u \parallel v$ si et seulement si $v \in \mathbb{R}u$.
- De même, tout vecteur u est colinéaire à lui-même, car on a $u \in \mathbb{R}u$: autrement dit, la relation $\parallel$ est *réflexive*.
- Par définition, on a $u \nparallel v$ lorsque la première condition n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si $u \neq \vec{o}$ *et* $v \notin \mathbb{R}u$.
- De même, on a $u \nparallel v$ lorsque la troisième condition n'est pas satisfaite, ce qui peut aussi se formuler ainsi :
  $$\text{si } \lambda, \mu \text{ sont des scalaires quelconques tels que } \lambda u + \mu v = \vec{o}, \text{ alors } \lambda = \mu = 0.$$
  Par exemple, on a $\vec{\imath} \nparallel \vec{\jmath}$, car si $\lambda\vec{\imath} + \mu\vec{\jmath} = \vec{o}$, alors $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 10 : Soient u, v, w des vecteurs quelconques.

1. Si $u \parallel v$, peut-on en déduire $v \parallel u$? Autrement dit, la relation $\parallel$ est-elle *symétrique* ?
2. Si $u \parallel v$ et $v \parallel w$, peut-on en déduire $u \parallel w$? Autrement dit, la relation $\parallel$ est-elle *transitive* ?
3. Même question si on suppose de plus que les vecteurs u, v, w sont non nuls.

Pythagore
(~ -580 - ~ -495)

Euclide
(~ -325 - ~ -265)

1.3 Produit scalaire, orthogonalité et norme euclidienne

Définition : Le *produit scalaire* de deux vecteurs du plan est le scalaire donné par la formule suivante :

$$\text{si } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ alors } \langle u, u' \rangle = xx' + yy'.$$

Remarque : Dans la littérature, le produit scalaire $\langle u, v \rangle$ est souvent noté $u \cdot v$, ou encore $\langle u \mid v \rangle$.

Exercice 11 : Calculer les scalaires $\langle u, \vec{\imath} \rangle$ et $\langle u, \vec{\jmath} \rangle$ pour un vecteur quelconque $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Proposition 7 (*symétrie* et *bilinéarité* du produit scalaire)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a les identités suivantes :

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \qquad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \qquad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle.$$

Exercice 12 : Vérifier ces identités, et en déduire les suivantes :

$\boxed{\langle \vec{o}, u \rangle = \quad = \langle u, \vec{o} \rangle,}$ $\boxed{\langle u, v + w \rangle = \qquad}$ $\boxed{\langle u, \lambda v \rangle = \qquad}$

Exercice 13 : Compléter la table suivante, et en déduire la formule du produit scalaire, en utilisant ses propriétés.

$\langle -, - \rangle$	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$		
$\vec{\jmath}$		

Définition : On dit que les vecteurs u, v sont *orthogonaux*, et on écrit $u \perp v$, si on a $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque : Le vecteur $\vec{o}$ est orthogonal à tous les autres. En particulier, il est orthogonal à lui-même.

Exercice 14 : Quel est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$?

Définition : Le *carré scalaire* du vecteur u est le produit scalaire $\langle u, u \rangle$.

Exercice 15 : Quelle est la formule du carré scalaire pour un vecteur quelconque $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$?

Proposition 8 (signe du carré scalaire)
Pour tout vecteur u, on a $\langle u, u \rangle \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Définition : La *norme euclidienne* du vecteur u est le réel $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geqslant 0$.

Remarques :
- Par définition, on a $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. D'ailleurs, le carré scalaire se note plutôt $\|u\|^2$ que $\langle u, u \rangle$.
- Si possible, on utilise le carré scalaire plutôt que la norme, pour éviter les formules avec des racines carrées.
- L'interprétation géométrique de $\|u\|$ est la *longueur* de u, c'est-à-dire la distance OP pour $u = \overrightarrow{OP}$.

Exercice 16 : En déduire l'équation cartésienne du *cercle* de centre O et de rayon $\rho \geqslant 0$.

Exercice 17 : Développer $\|u + v\|^2$, et en déduire une expression de $\langle u, v \rangle$ en fonction de $\|u + v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Proposition 9 (expression du produit scalaire en fonction de la norme, et critère d'orthogonalité)

On a $\boxed{\langle u, v \rangle = \qquad\qquad}$ Ainsi, on a $u \perp v$ si et seulement si $\boxed{\|u + v\|^2 = \qquad\qquad}$

Exercice 18 : Quelle est l'interprétation géométrique de l'équivalence ci-dessus ?

Exercice 19 : On considère le *parallélogramme* $OPRQ$ défini par les vecteurs u et v. Autrement dit, on a :

$$u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR}, \qquad v = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR}.$$

1. Développer $\|u - v\|^2$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\|u + v\| = \|u - v\|$.
2. Développer $\langle u + v, u - v \rangle$, et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour avoir $u + v \perp u - v$.
3. Quelles sont les interprétations géométriques de ces deux équivalences ?

Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Hermann Amandus Schwarz
(1843-1921)

Exercice 20 : Soient u et v des vecteurs quelconques. On pose $f(\lambda) = \|\lambda u - v\|^2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que dans le cas où $u \neq \vec{o}$, la fonction f s'écrit comme un polynôme du second degré.
2. Calculer le discriminant Δ de ce polynôme, et en déduire une inégalité vraie dans tous les cas.
3. Dans quel cas cette inégalité devient-elle une égalité ?

Proposition 10 (inégalité de *Cauchy-Schwarz*)
Si u et v sont des vecteurs, on a $\boxed{|\langle u, v\rangle| \leqslant \qquad\qquad}$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Proposition 11 (propriétés de la norme euclidienne)
Si u, v sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a :

$\boxed{\|u+v\| \leqslant \qquad\qquad}$ $\boxed{\|\lambda u\| = \qquad\qquad}$ $\|u\| = 0$ si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Exercice 21 : En utilisant Cauchy-Schwarz, démontrer ces trois propriétés, et en déduire l'identité $\boxed{\|-u\| = \qquad\qquad}$

Exercice 22 : Quelle est l'interprétation géométrique de l'inégalité de la proposition 11 ?

Définition : Un vecteur u est dit *unitaire* si on a $\|u\| = 1$.

Exercice 23 : Donner l'équation cartésienne et l'interprétation géométrique de l'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs unitaires.

Exercice 24 : Quels sont les vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur donné $u \neq \vec{o}$?

Définition : La *distance* (*euclidienne*) entre deux vecteurs u et v est le réel $\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\| \geqslant 0$.

Exercice 25 : Quelle est l'interprétation géométrique de cette notion pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$?

Exercice 26 : Démontrer les propriétés suivantes de la distance euclidienne :

$$\mathrm{d}(u, w) \leqslant \mathrm{d}(u, v) + \mathrm{d}(v, w), \qquad \mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(v, u), \qquad \mathrm{d}(u, v) = 0 \text{ si et seulement si } u = v.$$

Exercice 27 : Si $u \neq \vec{o}$ et v sont des vecteurs, pour quelle valeur de λ a-t-on $u \perp v - \lambda u$?

Définitions : Soient $u \neq \vec{o}$ et v des vecteurs :

- le *projeté orthogonal de v sur la droite* $\mathbb{R}u$ est l'unique vecteur v' tel que $v = v' + v''$ avec $u \parallel v'$ et $u \perp v''$;
- la *distance* $\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u)$ *entre le vecteur v et la droite* $\mathbb{R}u$ est la norme du vecteur $v'' = v - v'$.

Exercice 28 : Quelles sont les interprétations géométriques de ces deux notions pour $u = \overrightarrow{OP} \neq \vec{o}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$?

Proposition 12 (projeté orthogonal d'un vecteur sur une droite vectorielle)
Si $u \neq \vec{o}$, alors le projeté orthogonal d'un vecteur quelconque v sur la droite $\mathbb{R}u$ est le vecteur $\boxed{v' = \qquad\qquad}$

Exercice 29 : Soient $u \neq \vec{o}$ et v des vecteurs. On pose $u = \overrightarrow{OP}$, $v = \overrightarrow{OQ}$, $v' = \overrightarrow{OQ'}$ et $w = \overrightarrow{OR}$, où le vecteur v' est le projeté orthogonal de v sur la droite $\mathbb{R}u$, et w est le *symétrique orthogonal de v par rapport à cette droite*.

1. Quelle est la position du point Q' par rapport aux points Q et R ?
2. Exprimer le vecteur v' en fonction des vecteurs v et w, puis w en fonction de u et v.

Exercice 30 : Montrer que $\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u)$ est la distance *minimale* entre le vecteur v et un vecteur de la droite $\mathbb{R}u$.

1.4 Déterminant de deux vecteurs du plan

Définition : Le *déterminant* de deux vecteurs du plan est le scalaire donné par la formule suivante :

$$\text{si } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } u' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ alors } \det(u, u') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.$$

Remarque : Pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$, l'interprétation géométrique du réel $\det(u, v)$ est la suivante :

- sa valeur absolue est l'*aire* du parallélogramme $OPRQ$ défini par ces deux vecteurs ;
- il est positif (respectivement négatif) lorsque Q est *à gauche* (respectivement *à droite*) de P, vu depuis O.

Exercice 31 : En déduire la formule de l'aire du triangle OPQ pour $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$.

Proposition 13 (*antisymétrie* et *bilinéarité* du déterminant de deux vecteurs)
Si u, v, w sont des vecteurs et λ est un scalaire, on a les identités suivantes :

$$\det(u, v) = -\det(v, u), \qquad \det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w), \qquad \det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v).$$

Exercice 32 : Vérifier ces trois identités, et en déduire les suivantes :

$\boxed{\det(\vec{o}, u) = \quad = \det(u, \vec{o}),}$ $\boxed{\det(u, v + w) = \qquad\qquad}$ $\boxed{\det(u, \lambda v) = \qquad}$

$\boxed{\det(u, u) = \quad}$ $\boxed{\det(u + \lambda v, v) = \qquad\qquad = \det(u, v + \lambda u).}$

Exercice 33 : Compléter la table suivante, et en déduire la formule du déterminant, en utilisant ses propriétés.

det	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$
$\vec{\imath}$		
$\vec{\jmath}$		

Proposition 14 (critère de colinéarité dans le plan)
Si u, v sont des vecteurs du plan, on a $u \parallel v$ si et seulement si $\boxed{\det(u, v) = \qquad}$

Remarque : Dans ce cas, le parallélogramme défini par les vecteurs u, v est *dégénéré* : son aire est donc nulle.

Exercice 34 : Démontrer cette équivalence en utilisant les propriétés du déterminant ainsi que sa définition.

Exercice 35 : En déduire une équation de la droite $\mathbb{R}u$ pour $u = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} \neq \vec{o}$, et comparer avec l'exercice 9.

Exercice 36 : Développer, puis factoriser $\langle u, u' \rangle^2 + \det(u, u')^2$ pour $u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $u' = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

Proposition 15 (identité de *Lagrange* et inégalité de *Hadamard* dans le plan)
Si u, v sont des vecteurs du plan, on a $\boxed{\langle u, v \rangle^2 + \det(u, v)^2 = \qquad\qquad}$

En particulier, on a $\boxed{|\det(u, v)| \leqslant \qquad}$ avec égalité si et seulement si $\boxed{\qquad}$

Remarque : On obtient de même une preuve alternative de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 37 : En déduire la formule de l'aire du rectangle $OPRQ$ pour $u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PR} = v$.

Exercice 38 : Quelle est l'interprétation géométrique de l'inégalité de Hadamard ?

Exercice 39 : Soient $u \neq \vec{o}$ et v des vecteurs du plan. On pose $v = v' + v''$ avec $u \parallel v'$ et $u \perp v''$.

1. Exprimer $\|v\|^2$ en fonction de $\|v'\|$ et $\|v''\|$, puis $\|v'\|$ en fonction de $\langle u, v \rangle$ et $\|u\|$.
2. En utilisant Lagrange, exprimer $\|v''\|^2$, puis $\|v''\|$, en fonction de $\det(u, v)$ et $\|u\|$.

Proposition 16 (distance entre un vecteur et une droite vectorielle)
Si $u \neq \vec{o}$ et v sont des vecteurs du plan, la distance entre le vecteur v et la droite $\mathbb{R}u$ est $\boxed{\mathrm{d}(v, \mathbb{R}u) = \qquad\qquad}$

Exercice 40 : Quelle est l'interprétation géométrique de cette formule ?

1.5 Bases du plan

Notation : Si u, v sont des vecteurs, on pose $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
Autrement dit, cet ensemble est défini par le système d'équations paramétriques suivant :
$\begin{cases} x = a\lambda + b\mu, \\ y = c\lambda + d\mu, \end{cases}$ où les coefficients a, b, c, d sont donnés par $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, et λ, μ sont les paramètres.

Exercice 41 : Expliciter les ensembles suivants : $\mathbb{R}\vec{o} + \mathbb{R}\vec{o}$, $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{o}$, $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\imath}$, $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}(-\vec{\imath})$, et $\mathbb{R}\vec{\imath} + \mathbb{R}\vec{\jmath}$.

Exercice 42 : Démontrer les propriétés suivantes pour des vecteurs quelconques u, v, w :

$\vec{o}, u, v \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, alors $\lambda w \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$,

si $w, w' \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ alors $w + w' \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, si $u, v \in \mathbb{R}w$ alors $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}w$.

Exercice 43 : Montrer que si $u \nparallel v$, alors tout $w \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ s'écrit *de façon unique* sous la forme $w = \lambda u + \mu v$.

Exercice 44 : Montrer que $u \nparallel v$ et $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ dans les deux cas suivants :

1. $u = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $v = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$; 2. $u = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ et $v = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

Théorème 1 (*base de* $\mathbb{R}^2$)
Si u, v sont des vecteurs du plan, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $u \nparallel v$; 2. $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$; 3. $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \mathbb{R}^2$.

De plus, tout $w \in \mathbb{R}^2$ s'écrit alors *de façon unique* sous la forme $w = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Posons $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\delta = \det(u, v) = ad - bc$, et montrons les équivalences $1. \Leftrightarrow 2. \Leftrightarrow 3.$

- Si $u \nparallel v$, alors on a $\delta \neq 0$ et $du - cv = \delta\vec{\imath}$, d'où $\vec{\imath} = \frac{d}{\delta}u - \frac{c}{\delta}v \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, et de même, $\vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$. Réciproquement, supposons que $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$. Si $u \parallel v$, alors il existe un vecteur w tel que $u, v \in \mathbb{R}w$, d'où $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}w$ d'après l'exercice 42, ce qui donne $\vec{\imath} \parallel \vec{\jmath}$: contradiction. On a donc $u \nparallel v$.
- Si $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$, et si $w = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ est un vecteur quelconque, alors $w \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ d'après l'exercice 42. On a donc $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}u + \mathbb{R}v \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \mathbb{R}^2$. La réciproque est immédiate, car $\vec{\imath}, \vec{\jmath} \in \mathbb{R}^2$.

D'après l'exercice 43, tout $w \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ s'écrit alors de façon unique sous la forme $w = \lambda u + \mu v$. $\blacksquare$

Définitions : Si une de ces trois conditions équivalentes est satisfaite, on dit que le couple (u, v) est une *base de* $\mathbb{R}^2$.
De plus, si on a $w = \lambda u + \mu v$, on dit que les scalaires λ, μ sont les *composantes du vecteur w dans cette base*.

Exercice 45 : Quelles sont les composantes d'un vecteur quelconque du plan dans la *base canonique* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$?

Exercice 46 : Quelles sont les composantes des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans chacune des deux bases de l'exercice 44 ?

Exercice 47 : Montrer que si u est un vecteur non nul du plan, alors $(u, \vec{\imath})$ ou $(u, \vec{\jmath})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 48 : Montrer que trois vecteurs quelconques u, v, w du plan sont *linéairement dépendants* : autrement dit, il existe des scalaires λ, μ, ν *non tous nuls* tels que $\lambda u + \mu v + \nu w = \vec{o}$.

Définitions : Une base (u, v) de $\mathbb{R}^2$ est dite *orthogonale* si $u \perp v$, et *orthonormée* (ou *orthonormale*) si de plus, on a $\|u\| = \|v\| = 1$. Par ailleurs, elle est dite *directe* si on a $\det(u, v) > 0$, et *indirecte* si on a $\det(u, v) < 0$.

Exercice 49 : Préciser le type de chacune des bases suivantes :

$(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $(\vec{\jmath}, \vec{\imath})$, $(\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(-\vec{\imath}, -\vec{\jmath})$, $(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath}, \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath})$, $(\frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}, \frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath})$.

Exercice 50 :

1. Montrer que si $u \perp v$ et $\|u\| = \|v\| = 1$, alors $u \nparallel v$: autrement dit, (u, v) est une base orthonormée.
2. Si (u, v) est une base orthonormée, que peut-on dire de $\det(u, v)$? La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si $u \neq \vec{o}$, alors il existe un unique vecteur v tel que $u \perp v$, $\|u\| = \|v\|$ et $\det(u, v) > 0$.
4. En déduire la forme générale d'une base orthonormée directe (respectivement indirecte) de $\mathbb{R}^2$.