SMI1U3L : Géométrie et Arithmétique 1
Niveau L1, Session 1, Semestre 1, 2013-2014
Temps de l'épreuve: 2 heures
Ni documents ni calculatrices

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^2$ on donne les points

$$A = (-1, 3)\,,\ B = (3, -1)\,,\ C = (-3, -3)\,.$$

1. Montrer que le triangle est (ABC) est isocèle en C.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
3. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[A, B]$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les plans

$$P : x + 2y + 3z = -3, \quad P' : 2x + 5y - z = -1.$$

1. L'intersection de ces deux plans est une droite, notée D : déterminer un point et un vecteur directeur de D.

2. (i) Préciser un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ à P et un vecteur normal $\overrightarrow{n'}$ à P' puis calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{n''} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

(ii) Vérifier que $\overrightarrow{n''}$ est un vecteur directeur de D et justifier ce résultat par un raisonnement géométrique.

Exercice 3

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1+i}{3 - i\sqrt{3}}.$$

2. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes $1 + i$ et $3 - i\sqrt{3}$. En déduire le module et l'argument de z.

3. Déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 4

On considère un nombre complexe z quelconque non nul, de module ρ et d'argument θ : on pourra noter $z = [\rho, \theta]$ ou $z = \rho e^{i\theta}$.

1. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes

$$\overline{z},\ z^4,\ \frac{1}{z}.$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = i.$$

Déterminer le module et les arguments possibles de z.

Exercice 5

On rappelle qu'il existe plusieurs notations pour la relation de congruence modulo 11 : a est congru à b modulo 11 peut être notée $a \equiv b \ [11]$ ou $a \equiv b \pmod{11}$.

1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^4 - 1$ soit divisible par 3.

2. On considère un entier a compris entre 0 et 999 : on note $a = \overline{a_2 a_1 a_0}$, ce qui signifie

$$a = 100a_2 + 10a_1 + a_0, \quad 0 \leq a_0, a_1, a_2 \leq 9.$$

Montrer que $a \equiv a_2 - a_1 + a_0 \ [11]$. En déduire que a est divisible par 11 si et seulement si $a_2 + a_0 = a_1$ ou $a_2 + a_0 = a_1 + 11$. Donner un exemple de chacun des deux cas.

Exercice 6

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 60 et 84. En déduire deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$60u + 84v = 12.$$

2. (i) Déterminer tous les couples $(A, B) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $60A - 84B = 0$.

(ii) Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $60a - 84b = 12$.

(iii) Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $60a - 84b = 20$.

Corrigé Examen

Exercice 1 (3.5 points)

1.

1 pt $\overrightarrow{AC} = (-2, -6)$ et $\overrightarrow{BC} = (-6, -2)$ donc $AC = BC = 2\sqrt{10}$.

2.

1 pt Le vecteur directeur est $\overrightarrow{AB} = (4, -4)$: $M = A + t.\overrightarrow{AB}$ donne $x = -1 + 4t,\ y = 3 - 4t$.

2.

1.5 pt Le milieu de $[A, B]$ est $I = (1, 1)$: $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donne $y = x$.

Exercice 2 (3.5 points)

1.

1.5 pt On résoud le système et on trouve $x = -13 - 13z,\ y = 5 + 7z$, donc $(x, y, z) = (-13, 5, 0) + z.(-17, 7, 1)$: point $A = (-13, 5, 0)$, VD $\overrightarrow{u} = (-17, 7, 1)$.

2.

1 pt $\overrightarrow{n} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{n'} = (2, 5, -1)$ donc $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \overrightarrow{u}$.

1 pt $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à tout vecteur de P donc à $\overrightarrow{u}$, et idem pour $\overrightarrow{n'}$: $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à vect $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right)$ donc colinéaire à $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Exercice 3 (3 points)

1.

1 pt $z = \frac{3-\sqrt{3}}{12} + i\frac{3+\sqrt{3}}{12}$: $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{3-\sqrt{3}}{12},\ \mathrm{Im}\,(z) = \frac{3+\sqrt{3}}{12}$.

2.

1.5 pt $1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right],\ 3 - i\sqrt{3} = \left[\sqrt{12}, -\frac{\pi}{6}\right]$ donc $z = \left[1/\sqrt{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$.

3.

0.5 pt Par identification $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = ...$

Exercice 4 (3.5 points)

1.

1.5 pt $\overline{z} = [\rho, -\theta]$, $z^4 = [\rho^4, 4\theta]$, $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$.

2.

1 pt $z^4 = i$ ssi $\rho^4 = 1$, $4\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ssi $\rho = 1$, $\theta \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$.

1 pt Quatre solutions $[1, \pi/8]$, $[1, 5\pi/8]$, $[1, 9\pi/8]$, $[1, 13\pi/8]$.

Exercice 5 (3 points)

1.

1.5 pt $n \equiv 0\ [3] \Rightarrow n^4 - 1 \equiv 2\ [3]$, $n \equiv 1\ [3] \Rightarrow n^4 - 1 \equiv 0\ [3]$, $n \equiv 2\ [3] \Rightarrow n^4 - 1 \equiv 0\ [3]$: donc $n = 3k+1, 3k+2$.

2.

0.5 pt $10 \equiv -1\ [11]$ donc $10^2 \equiv 1\ [11]$ et $100a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv a_2 - a_1 + a_0\ [11]$.

0.5 pt a est divisible par 11 ssi $a \equiv 0\ [11]$ ssi $a_2 + a_0 \equiv a_1\ [11]$: comme $0 \leq a_2 + a_0 \leq 18$ on obtient les 2 cas annoncés.

0.5 pt Par exemple $154 = 14 \times 11$ et $319 = 29 \times 11$.

Exercice 6 (4.5 points)

1.

1 pt $84 = 60 \times 1 + 24$, $60 = 24 \times 2 + 12$, $24 = 12 \times 2 + 0$ donc $60 \wedge 84 = 12$.

1 pt De plus $12 = 60 - 24 \times 2$ et $24 = 84 - 60 \times 1$ donc $12 = 3 \times 60 - 2 \times 84$.

2.

1 pt $60A - 84B = 0$ ssi $5A = 7B$: 5 divise B donc $B = 5k$, puis $A = 7k$.

1 pt $60a - 84b = 12$ admet la solution particulière $(3, 2)$, donc $a = 3 + 7k$, $b = 2 + 5k$.

0.5 pt 12 divise 60 et 84 mais 12 ne divise par 20 : impossible.