Machines à registres et réécriture de mots

Yves Lafont
Institut de Mathématiques de Luminy
Université d'Aix-Marseille
yves.lafont@univ-amu.fr

devoir à rendre pour le 20 novembre

On considère une *machine* à m *registres* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m$ et n *instructions* numérotées de 1 à n :

- le numéro 1 correspond à l'instruction initiale ;
- le numéro 0 correspond à l'*arrêt* de la machine. (Il n'y a donc pas d'instruction 0.)

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, il y a deux types d'instructions possibles :

- $\mathbf{incr}\, P \to j$: incrémenter le registre P, puis aller à l'instruction j ;
- $\mathbf{decr}\, P \to j, k$: décrémenter le registre P, puis aller à l'instruction j, ou si P est nul, aller à l'instruction k.

Bien entendu, on a $P \in \{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m\}$ et $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

1 Exemple de machine à registres

Quelle fonction calcule la machine suivante à 3 registres $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ (avec les registres $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ initialisés à 0) ?

1. $\mathbf{decr}\, \mathbf{P} \to 2, 0$;
2. $\mathbf{decr}\, \mathbf{P} \to 3, 5$;
3. $\mathbf{incr}\, \mathbf{Q} \to 4$;
4. $\mathbf{incr}\, \mathbf{R} \to 2$;
5. $\mathbf{decr}\, \mathbf{Q} \to 6, 1$;
6. $\mathbf{incr}\, \mathbf{P} \to 5$.

Cette machine s'arrête-t-elle pour toute valeur initiale p dans le registre $\mathbf{P}$? Dans quel registre se trouve le résultat ?

2 Problème de l'arrêt

Le *problème de l'arrêt* est le suivant pour une machine à m registres $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m$:

- la machine s'arrête-t-elle si on part de l'instruction 1 avec les valeurs $p_1, \ldots, p_m$ dans les registres ?

Pour quel type de machine à registres démontre-t-on que ce problème est *indécidable* ?

Combien faut-il de registres ? Pourquoi ?

3 Exemple de système de réécriture de mots

On considère l'*alphabet* $\Sigma = \{a, b\}$ et l'ensemble de *règles* $\mathcal{R} = \{(aa, 1), (bb, 1), (aba, bab)\} \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$.

Montrer que ce système est *noetherien*, c'est-à-dire qu'il satisfait la *propriété de terminaison*.

Quels sont les mots *réduits* ? Quels sont les *pics critiques* ? Sont-ils *confluents* ? Le système est-il *convergent* ?

4 Confluence forte

On considère un *système de réécriture* donné par un alphabet fini Σ et un ensemble fini de règles $\mathcal{R} \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$. On suppose que les membres gauches de règles sont des mots non vides, si bien que le mot vide 1 est réduit.

Un tel système est dit *fortement confluent* si on a la propriété de *confluence en un étape* :

- si $u \to_{\mathcal{R}} v$ et $u \to_{\mathcal{R}} v'$, alors $v = v'$ ou il existe w tel que $v \to_{\mathcal{R}} w$ et $v' \to_{\mathcal{R}} w$.

Montrer que tout système fortement confluent est *localement confluent*. La réciproque est-elle vraie ?

Montrer que tout système fortement confluent est *confluent* (sans supposer qu'il est *noetherien*).

Montrer que si le système est fortement confluent et v est réduit, alors on a $u \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} v$ si et seulement si $u \to^*_{\mathcal{R}} v$.

Montrer que si le système n'a pas de pic critique, alors il est fortement confluent.

5 Codage d'une machine à registres

On considère une machine à 2 registres et n *instructions*, et on note Σ l'alphabet formé des lettres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et de quelques lettres supplémentaires $b, c, \ldots$

Construire un ensemble de règles $\mathcal{R}$ et un codage $[-,-,-] : \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Sigma^*$ tel que :

- le système de réécriture n'a pas de pic critique ;
- $[i, p, q] \to^*_{\mathcal{R}} 1$ si et seulement si la machine s'arrête en partant de l'instruction i avec p, q dans les registres.

En déduire que le problème suivant est indécidable :

- si $u \in \Sigma^*$ est donné, a-t-on $u \leftrightarrow^*_{\mathcal{R}} 1$?