

2ème année de Master Recherche MDFI — 1er examen

Logique et Théorie du Calcul — Paul Ruet

17 novembre 2010, 9h - 11h

Les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Attention à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (13 points) Un ensemble de fonctions ayant un nombre fini de variables dans $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dit *clos par opérations élémentaires* s'il satisfait les conditions suivantes :

- il contient les fonctions de base : projections, addition, multiplication, et δ la fonction caractéristique de l'égalité : $\delta(x, y) = 1$ si $x = y$, 0 sinon ;
- il est clos par composition ;
- il est clos par somme et produit bornés.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des *fonctions élémentaires* est le plus petit ensemble clos par opérations élémentaires. Une relation $R \subseteq \mathbb{N}^n$ est une *relation élémentaire* si sa fonction caractéristique χ_R l'est.

1. Expliquer brièvement pourquoi toute fonction élémentaire est primitive récursive.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont élémentaires : $x \mapsto 1$, la fonction successeur, $x \mapsto 0$, les polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$. Montrer que les fonctions

$$\overline{zero}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad zero(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont élémentaires. Montrer que $(a, x) \mapsto a^x$ est élémentaire. Montrer que $\mathcal{E}$ est clos par définition par cas. Montrer que le prédécesseur $0 \mapsto 0, x+1 \mapsto x$ est élémentaire.

3. Montrer que les relations $\leq$ et $<$ sont élémentaires. Montrer que l'ensemble des relations élémentaires est clos par les opérations booléennes et par les quantifications (existentielle et universelle) bornées.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est clos par minimalisation bornée : si R est élémentaire, alors la fonction suivante est élémentaire :

$$(\vec{a}, x) \mapsto \mu t \leq x. R(\vec{a}, t) = \begin{cases} \text{le plus petit } t \leq x \text{ tel que } R(\vec{a}, t) & \text{s'il existe,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\div$ et le quotient et le reste de la division euclidienne sont élémentaires.

5. Montrer que les relations suivantes sont élémentaires : x divise y , x est premier. Soit p_n le n -ième nombre premier. En remarquant que $p_{n+1} \leq 1 + \prod_{i=0}^n p_i$, montrer que $p_n \leq 2^{2^n}$ et que la fonction

$$\pi : n \mapsto \text{le nombre de nombres premiers } \leq n$$

est élémentaire, puis que $n \mapsto p_n$ est élémentaire.

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé ici) que $\mathcal{E}$ est clos par *récurrence bornée* : si $g, h, b \in \mathcal{E}$, alors la fonction f (unique si elle existe) vérifiant $f(\vec{a}, 0) = g(\vec{a})$, $f(\vec{a}, x+1) = h(\vec{a}, x, f(\vec{a}, x))$ et $f(\vec{a}, x) \leq b(\vec{a}, x)$ est élémentaire. Mais il existe des fonctions primitives récursives non élémentaires, comme nous allons le voir.

6. Soit $\exp^0(x) = x$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\exp^k = \underbrace{\exp \circ \cdots \circ \exp}_k, \quad \text{et soit} \quad E(x) = \underbrace{(\exp \circ \cdots \circ \exp)}_x(x).$$

Expliquer brièvement pourquoi ces fonctions sont primitives récursives. Montrer que les fonctions $\exp^k$ sont croissantes, et que pour tout x , la fonction $k \mapsto \exp^k(x)$ est croissante.

7. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ domine une fonction $g : \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ s'il existe un entier K tel que pour tout $\vec{a} \in \mathbb{N}^p$, $g(\vec{a}) \leq f(\max(\vec{a}, K))$. Soit $\mathcal{E}'$ l'ensemble des fonctions dominées par l'une des fonctions $\exp^k$.
- (a) Montrer que $\mathcal{E}'$ contient les fonctions de base et est clos par composition.
 - (b) Montrer que $\mathcal{E}'$ est clos par somme bornée. On pourra admettre sans démonstration que pour tout entier $x \geq 5$, $(x+1) \cdot \exp^k(x) \leq \exp^{k+1}(x)$.
 - (c) Montrer que $\mathcal{E}'$ est clos par produit borné. On pourra admettre sans démonstration que pour tous entiers $x \geq 5$ et $k \geq 1$, $(\exp^k(x))^{x+1} \leq \exp^{k+1}(x)$.
 - (d) En déduire que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$.
 - (e) Montrer que E domine toutes les fonctions élémentaires, et donc que $E \notin \mathcal{E}$.

Exercice 2 (7 points) On souhaite définir une machine de Turing qui décide, étant donné un graphe simple fini dirigé $G = (V, E)$ et deux sommets $v, w \in V$, s'il existe un chemin de v vers w .

1. Soient A_p, B_p deux suites d'ensembles de sommets et i_p une suite de sommets telles que

$$\begin{aligned} i_p &\in A_p \\ A_0 &= B_0 = \{v\} \\ A_{p+1} &= A_p \setminus \{i_p\} \cup C_p \\ B_{p+1} &= B_p \cup C_p \end{aligned}$$

où C_p est l'ensemble des sommets $j \notin B_p$ tels que G ait un arc de i_p vers j . Montrer que $A_p \subseteq B_p$ pour tout p , et que ces suites sont finies. Montrer qu'il existe un chemin de v vers w si et seulement si $w \in B_k$ pour un certain k .

2. On convient que l'ensemble des sommets V est l'ensemble d'entiers $\{1, \dots, n\}$, de sorte que la donnée du problème est un quadruplet (n, v, w, ℓ) , où $v, w \leq n$ et ℓ est la suite des arcs (couples de sommets) dans E . Tous ces entiers sont représentés en binaire. Définir précisément une machine de Turing qui formalise l'algorithme ci-dessus.