

2ème année de Master Recherche MDFI — 2nd examen

Logique et Théorie du Calcul — Paul Ruet

1er décembre 2010, 9h - 10h30

Les documents sont autorisés. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.
Attention à la clarté de la rédaction.

Exercice 1 (8 points) Si $L \subseteq \Sigma^*$ est un langage, son *étoile de Kleene* est le langage $L^* = \{w_1 \cdots w_k \mid k \geq 0, w_1, \dots, w_k \in L\} \subseteq \Sigma^*$ constitué des concaténés de mots de L . Une classe de complexité X est dite *close par étoile de Kleene* si $L \in X$ implique $L^* \in X$.

1. Montrer que **NP** est close par étoile de Kleene.
2. On veut montrer que **P** est close par étoile de Kleene. Dans ce but, on se donne un langage $L \in \mathbf{P}$.
 - (a) Etant donné un mot $w = x_1 \cdots x_n$ où $x_i \in \Sigma$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit une relation binaire $R \subseteq \{(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \mid i \leq j\}$ par $R(i, j) \Leftrightarrow x_i \cdots x_j \in L^*$. Pour tout $\ell \in \{0, \dots, n\}$, soit R_ℓ l'ensemble des couples (i, j) tels que $R(i, j)$ et $j - i \leq \ell$. Donner un algorithme polynômial qui calcule R_ℓ (écrit R_ℓ sous forme de liste) pour ℓ croissant de 0 à n .
 - (b) En déduire que $L^* \in \mathbf{P}$. Conclure.

Exercice 2 (12 points) 1. Soit **NaeSat** (pour “not all equal”) le problème suivant : étant donnée une formule propositionnelle ϕ sous forme normale conjonctive dont les clauses $\phi_1, \dots, \phi_k$ ont chacune exactement 3 littéraux, existe-t-il une valuation η satisfaisant ϕ et telle que pour toute clause $\phi_i = x_i^1 \vee x_i^2 \vee x_i^3$, au moins un des trois littéraux x_i^1, x_i^2, x_i^3 est faux pour η ? On dira dans ce cas que η *nae-satisfait* ϕ .

- (a) Expliquer pourquoi **NaeSat** $\in \mathbf{NP}$.
- (b) On veut montrer qu'il est possible de modifier la réduction (vue en cours) de **CircuitSat** à **3Sat** en une réduction de **CircuitSat** à **NaeSat**, en ajoutant dans la formule ψ_s associée au circuit C , une nouvelle même variable z à chaque clause d'au plus 2 littéraux (c'est-à-dire en remplaçant x_i^1 par $x_i^1 \vee z$, et $x_i^1 \vee x_i^2$ par $x_i^1 \vee x_i^2 \vee z$). Montrer que si η nae-satisfait la formule ψ'_s ainsi définie, alors $\bar{\eta} : x \mapsto \neg\eta(x)$ nae-satisfait aussi ψ'_s , et que l'une de ces deux valuations satisfait le circuit C . Réciproquement, montrer que si le circuit est satisfiable, alors il existe une valuation qui nae-satisfait ψ'_s . En conclure que **NaeSat** est **NP-complet**.

2. Soit **3Col** le problème suivant : étant donné un graphe non-dirigé G , existe-t-il une 3-coloration de G , c'est-à-dire une fonction κ de l'ensemble $|G|$ des sommets de G dans $\{0, 1, 2\}$ telle que si x, y sont deux sommets adjacents quelconques, $\kappa(x) \neq \kappa(y)$?

(a) Expliquer pourquoi **3Col** $\in$ **NP**.

(b) On veut montrer que **3Col** est **NP**-complet en réduisant **NaeSat** à **3Col**. Etant donnée une formule ϕ sous forme normale conjonctive dont les clauses $\phi_1, \dots, \phi_k$ ont chacune exactement 3 littéraux, on construit le graphe G suivant :

- $|G|$ contient $3m + 2n + 1$ sommets, n étant le nombre de variables de ϕ : un sommet distingué a , 2 sommets notés $x, \neg x$ pour chaque variable x , 3 sommets notés $\phi_i^1, \phi_i^2, \phi_i^3$ pour chaque clause $\phi_i = \phi_i^1 \vee \phi_i^2 \vee \phi_i^3$;
- un triangle (graphe complet à 3 sommets) $[a, x, \neg x]$ pour chaque variable x , un triangle $[\phi_i^1, \phi_i^2, \phi_i^3]$ pour chaque clause ϕ_i ;
- une arête entre ϕ_i^j et le sommet (x ou $\neg x$) représentant le littéral ϕ_i^j .

Montrer que G admet une 3-coloration si et seulement si ϕ est nae-satisfiable. Conclure.