Réécriture et problème du mot

Yves Lafont
Institut de Mathématiques de Luminy
Aix-Marseille 2

Problème du mot

Dans un monoïde (non commutatif) :

- sachant que $ab = 1$,
  peut-on en déduire que $ba = 1$? **NON**
- sachant que $ab = 1 = bc$,
  peut-on en déduire que $ba = 1$? **OUI**

$$ba = babc = bc = 1$$

Plus généralement :

- sachant que $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$,
  peut-on en déduire que $u = v$?

Système de réécriture

Définition :

- ensemble Σ de *symboles* (ou *alphabet*)
- ensemble $R \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$ de *règles de réécriture*, où Σ^* est le *monoïde libre* (ou ensemble des *mots*)

On écrit :

- $urv \to usv$ si $(r,s) \in R$ et $u,v \in \Sigma^*$
- $u_1 \to^* u_n$ si $u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n$

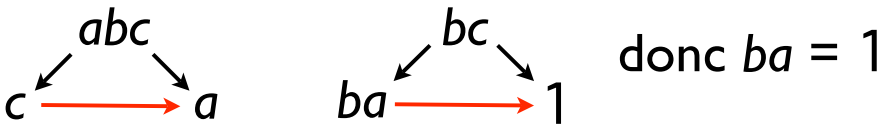
Réécriture convergente

Définition : Un système est *convergent* si :

- il n'existe pas de réécriture infinie :
  $u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n \to \ldots$ (*terminaison*)
- si $u \to v$ et $u \to v'$, alors il existe w tel que
  $v \to^* w$ et $v' \to^* w$ (*confluence*)

Exemples :

- $ab \to 1$: système convergent
- $ab \to 1$, $bc \to 1$: système non confluent



donc $ba = 1$

Présentations de groupes

Exemples :

présentation du groupe	éléments du groupe	nom du groupe
$\langle a \rangle$	$a^n, n \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}$
$\langle a \mid aa \rangle$	$1, a$	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$
$\langle a,b \rangle$	???	$\mathbf{F}_2$
$\langle a,b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$	$a^p b^q, p,q \in \mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$

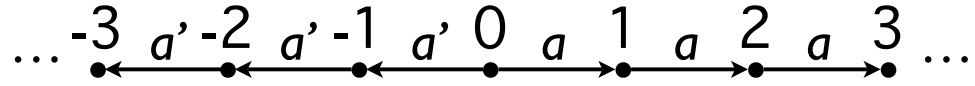
Théorème (Novikov-Boone vers 1950) :
Il existe une présentation finie de groupe pour laquelle le problème du mot est *indécidable*.

Groupe libre $\mathbf{F}_1 = \mathbf{Z}$

Présentation convergente :

- 2 symboles (ou *générateurs*) : a, a'
- 2 règles de réécriture : $aa' \to 1$, $a'a \to 1$
- 2 *conflits* (ou *paires critiques*) :

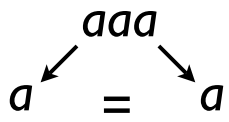
formes normales : $1, a, aa, aaa, \ldots, a', a'a', a'a'a', \ldots$



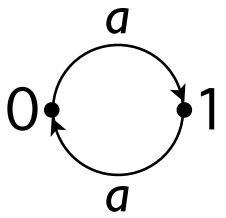
Groupe cyclique $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$

Présentation convergente :

- 1 générateur : a
- 1 règle : $aa \to 1$
- 1 conflit :



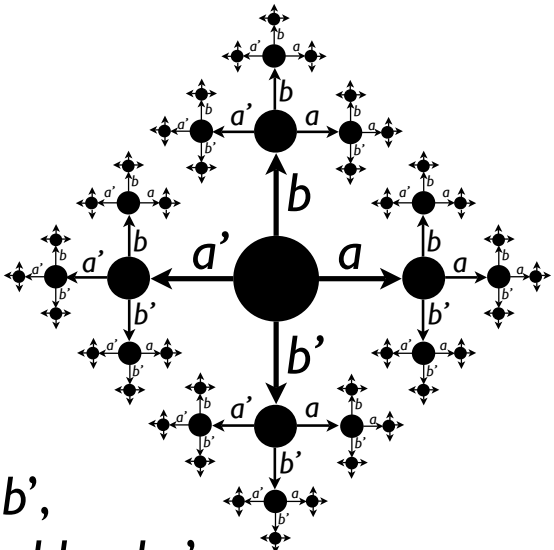
formes normales : $1, a$



Groupe libre $\mathbf{F}_2$

Présentation convergente :

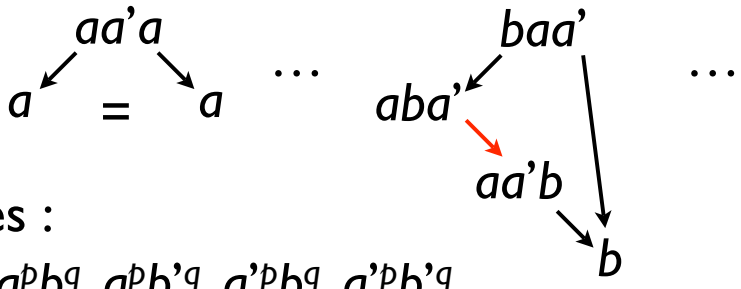
- 4 générateurs : a, a', b, b'
- 4 règles :
  $aa' \to 1, a'a \to 1,$
  $bb' \to 1, b'b \to 1$
- 4 conflits …



formes normales : $1, a, b, a', b',$
$aa, ab, ab', ba, bb, ba', a'b, a'a', a'b',$
$b'a, b'a', b'b', aaa, aab, aab', aba, abb, aba', \ldots$

Groupe commutatif libre $\mathbf{Z}^2$

Présentation convergente :

- 4 générateurs : a, a', b, b'
- 8 règles :
  $aa' \to 1, a'a \to 1, bb' \to 1, b'b \to 1,$
  $ba \to ab, ba' \to a'b, b'a \to ab', b'a' \to a'b'$
- 12 conflits : 

formes normales :
$1, a^p, a'^p, b^q, b'^q, a^p b^q, a^p b'^q, a'^p b^q, a'^p b'^q$

Preuve par réécriture

Proposition : La famille infinie $(b^n a b^{-n})_{n \in \mathbf{Z}}$ est *libre* dans le groupe libre $\mathbf{F}_2 = \langle a,b \rangle$.

- on part des générateurs a, a', b, b' et des relations :
  $aa' = 1, a'a = 1, bb' = 1, b'b = 1$
- on ajoute une infinité de *générateurs superflus* :
  $a_n = b^n a b'^n$, $a'_n = b^n a' b'^n$, $a_{-n} = b'^n a b^n$, $a'_{-n} = b'^n a' b^n$
  et on écrit a_0 pour a, a'_0 pour a'
- on ajoute une infinité d'*équations dérivables* :
  $a_n a'_n = 1, a'_n a_n = 1,$
  $ba_n = a_{n+1} b, ba'_n = a'_{n+1} b, b'a_n = a_{n+1} b', b'a'_n = a'_{n+1} b'$

Preuve par réécriture

- on supprime une infinité d'équations dérivables :
  $a_n = b^n ab'^n$, $a'_n = b^n a' b'^n$, $a_{-n} = b'^n a b^n$, $a'_{-n} = b'^n a' b^n$
- on obtient une présentation convergente :
  $a_n a'_n \to 1$, $a'_n a_n \to 1$,
  $bb' \to 1$, $b'b \to 1$,
  $ba_n \to a_{n+1} b$, $ba'_n \to a'_{n+1} b$,
  $b'a_n \to a_{n+1} b'$, $b'a'_n \to a'_{n+1} b'$
- on en déduit un morphisme $\varphi : \mathbf{F}_\omega \to \mathbf{F}_2$
- ce morphisme est injectif
  (préservation des formes normales)

C.Q.F.D.

Machines à 2 registres

- 2 *registres* $x, y \in \mathbf{N}$
- suite d'*instructions* numérotées de 1 à n
  (*incrémentation*, *décrémentation avec test*)

Exemple :

(1) si $x = 0$ alors stop, sinon décrémenter x et aller à 2
(2) incrémenter y et aller à 3
(3) incrémenter y et aller à 1

Configuration : $(i,x,y) \in \{1,\ldots,n\} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$

Règles : $(1,0,y) \to (0,0,y)$, $(1,x+1,y) \to (2,x,y)$, $(2,x,y) \to (3,x,y+1)$, $(3,x,y) \to (1,x,y+1)$

Problème de l'arrêt

Etant donné (i,x,y), a-t-on $(i,x,y) \rightarrow^* (0,0,0)$?

Théorème : Il existe une machine à 2 registres pour laquelle le *problème de l'arrêt* est indécidable.

Preuve : On code l'arrêt d'une *machine de Turing*.

Corollaire : Il existe une présentation finie de monoïde pour laquelle le problème du mot est indécidable.

idée : $(i,x,y) \Rightarrow ab^x c_i d^y e$

$(1,0,y) \rightarrow (0,0,y)$, $(1,x+1,y) \rightarrow (2,x,y)$, $(2,x,y) \rightarrow (3,x,y+1)$, $(3,x,y) \rightarrow (1,x,y+1)$

$ac_1 \rightarrow ac_0$, $bc_1 \rightarrow c_2$, $c_2 \rightarrow c_3 d$, $c_3 \rightarrow c_1 d$

Interférences fatales

Exemple :

(1) si $x = 0$ alors stop, sinon décrémenter x et aller à 2

(2) incrémenter x et aller à 3

(3) si $y = 0$ alors stop, sinon décrémenter y et aller à 3

$ac_1 \rightarrow ac_0$, $bc_1 \rightarrow c_2$, $c_2 \rightarrow bc_3$, $c_3 e \rightarrow c_0 e$, $c_3 d \rightarrow c_3$

Si on rajoute les inverses, on obtient :

$c_1 = b^{-1} b c_1 = b^{-1} c_2 = b^{-1} b c_3 = c_3$

d'où $ac_1 de = ac_3 de = ac_3 e = ac_0 e$

Et pourtant, on n'a pas $(1,0,1) \rightarrow^* (0,0,0)$!

Il faut trouver un autre codage …

Machines affines

- *positions* $z \in \mathbf{Z}$
- *règles affines* : $p+qz \to p'+q'z$ $(p,q,p',q' \in \mathbf{Z}, q,q' \neq 0)$

Exemple (*problème de Syracuse*) :

$2z \to z, \quad 2z+1 \to 6z+4$

Accessibilité de $m \in \mathbf{Z}$: étant donné $z \in \mathbf{Z}$, a-t-on $z \to^* m$?

Théorème : Il existe une machine affine finie et $m \in \mathbf{Z}$ tels que le problème de l'accessibilité de m est indécidable.

On code l'arrêt d'une machine à registres.

On a fait le plus facile ! Merci pour votre attention.

Références

- Yves Lafont,
  Réécriture et problème du mot,
  Gazette des mathématiciens 120
  (SMF, avril 2009)
- article et diaporama accessibles sur mon site web : *Google Yves Lafont*