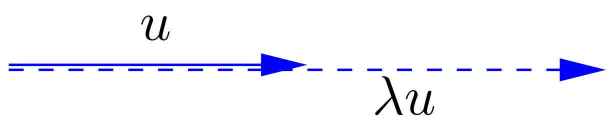
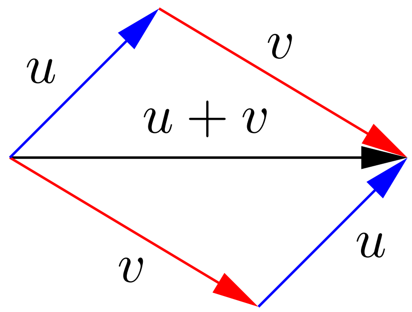
Introduction à l’algèbre linéaire

Yves Lafont
Faculté des Sciences de Luminy
Université de la Méditerranée

9 septembre 2003

Produit d'un vecteur par un scalaire et somme de deux vecteurs

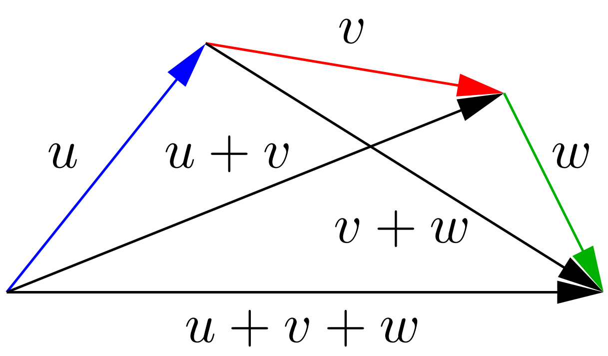


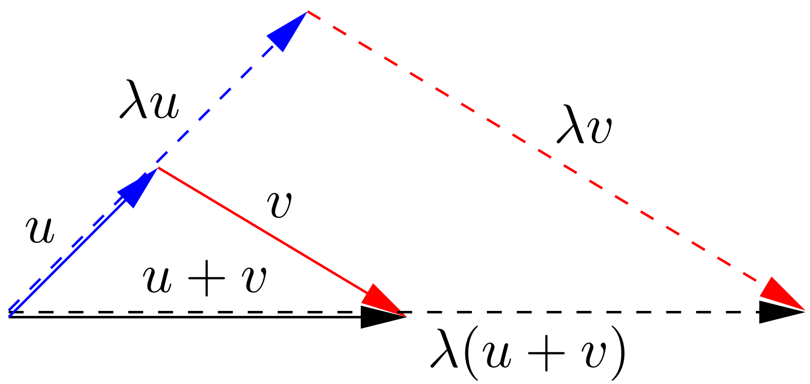


$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \qquad 1u = u \qquad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u \qquad 0u = \vec{0}$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad u + \vec{0} = u \qquad u + v = v + u$$

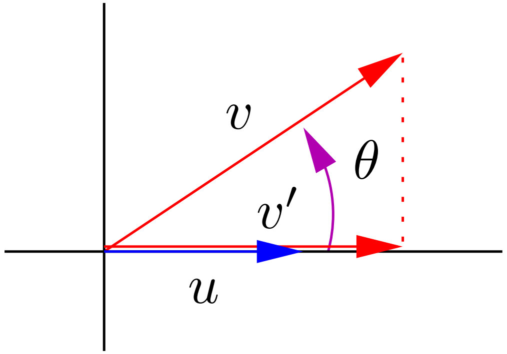
$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \qquad \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

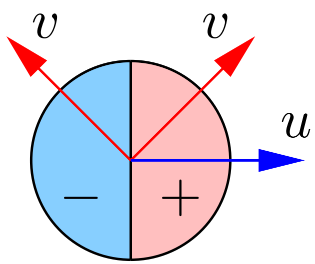


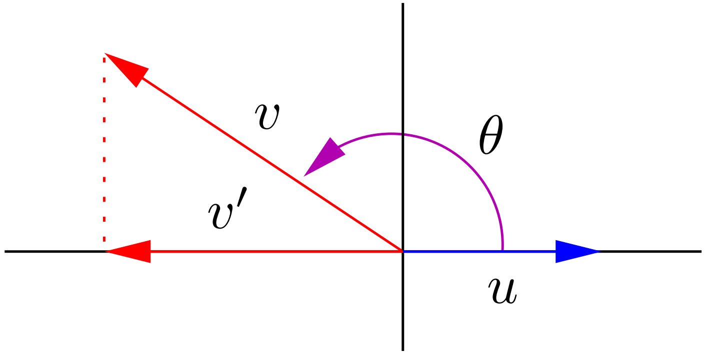


Produit scalaire

$u \cdot v = \pm\|u\|\|v'\|$ où v' est le projeté orthogonal de v sur l'axe défini par u, avec un signe $+$ si u et v' ont le même sens, $-$ s'ils ont des sens opposés.

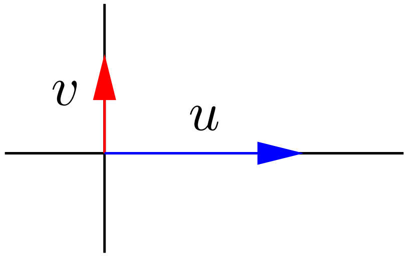


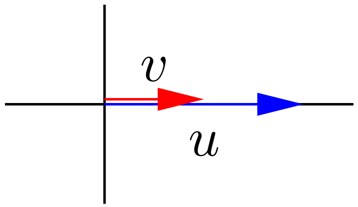


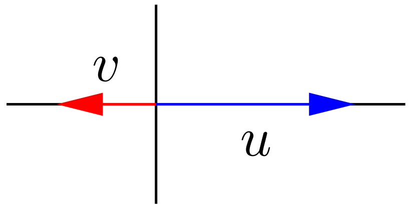


$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta \qquad |u \cdot v| \leq \|u\|\|v\| \qquad u \cdot u = \|u\|^2$$

$$u \cdot v = 0 \text{ ssi } u \perp v \qquad |u \cdot v| = \|u\|\|v\| \text{ ssi } u \parallel v$$

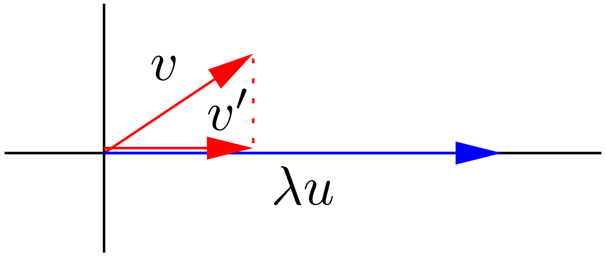


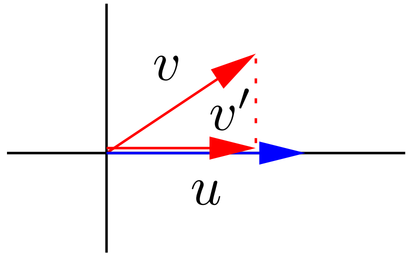


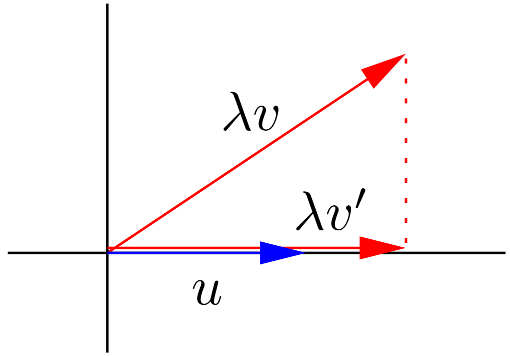


Bilinéarité du produit scalaire

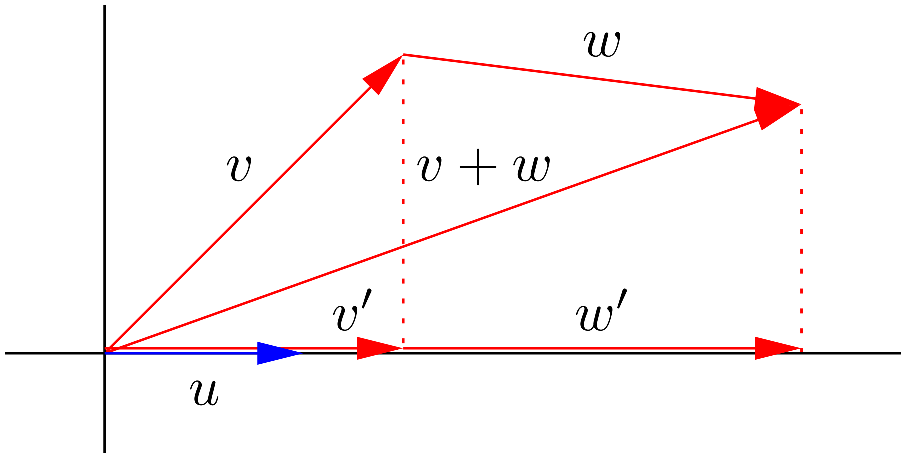
$$\lambda u \cdot v = \lambda(u \cdot v) = u \cdot \lambda v$$







$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

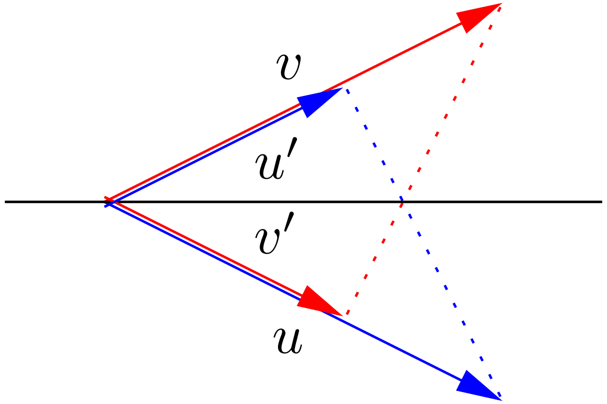


Pour montrer que $(u + v) \cdot w = u \cdot v + v \cdot w$, on utilise la symétrie du produit scalaire.

Symétrie du produit scalaire

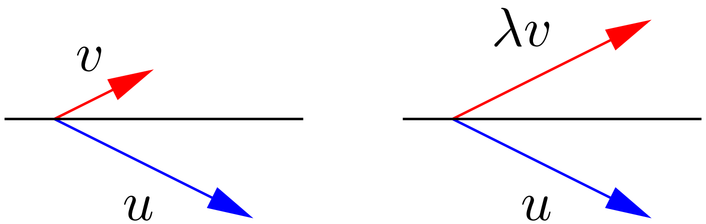
$$u \cdot v = v \cdot u$$

Dans le cas particulier où $\|u\| = \|v\|$, on applique une symétrie axiale :



$$u \cdot v = \|u\|\|v'\| = \|v\|\|u'\| = v \cdot u$$

Dans le cas général, on pose $\lambda = \dfrac{\|u\|}{\|v\|}$ de sorte que $\|\lambda v\| = \|u\|$:



$$u \cdot v = \frac{u \cdot \lambda v}{\lambda} = \frac{\lambda v \cdot u}{\lambda} = v \cdot u$$

Axiomatique du produit scalaire

Axiomes du produit scalaire :

$$\lambda u \cdot v = \lambda(u \cdot v) \qquad (u+v)\cdot w = u \cdot w + u \cdot w \qquad u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot u \geq 0 \qquad u \cdot u = 0 \text{ ssi } u = \vec{0}$$

Définitions de la norme et de l'orthogonalité :

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} \qquad u \perp v \text{ ssi } u \cdot v = 0$$

Une identité remarquable : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\, u \cdot v$

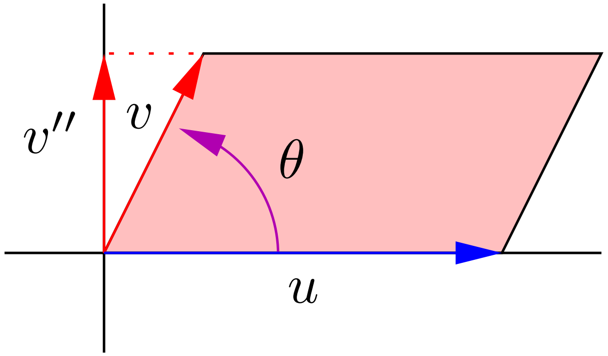
Conséquences des axiomes et des définitions :

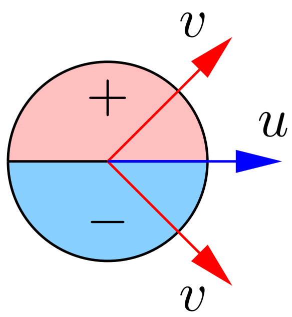
$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ ssi } u \perp v \qquad |u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$$

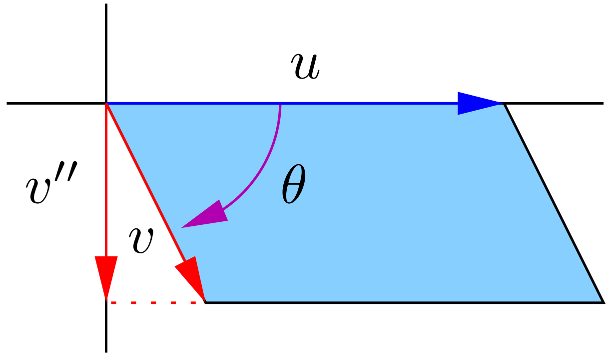
$$\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\| \qquad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \qquad \|u\| = 0 \text{ ssi } u = \vec{0}$$

Déterminant de deux vecteurs du plan

$\det(u,v) = \pm\|u\|\|v''\|$ où v'' est le projeté orthogonal de v sur l'axe orthogonal à u, avec un signe $+$ si v est à gauche de u, $-$ si v est à droite de u.



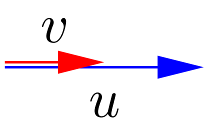


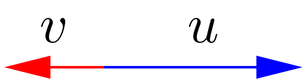


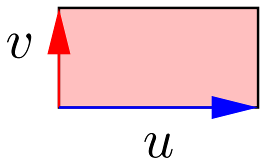
Remarque : $|\det(u,v)|$ est l'aire du parallélogramme défini par u et v.

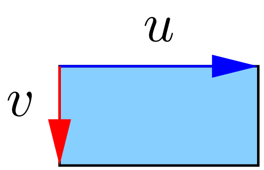
$$\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin\theta \qquad\qquad |\det(u,v)| \leq \|u\|\|v\|$$

$$\det(u,v) = 0 \text{ ssi } u \parallel v \qquad\qquad |\det(u,v)| = \|u\|\|v\| \text{ ssi } u \perp v$$



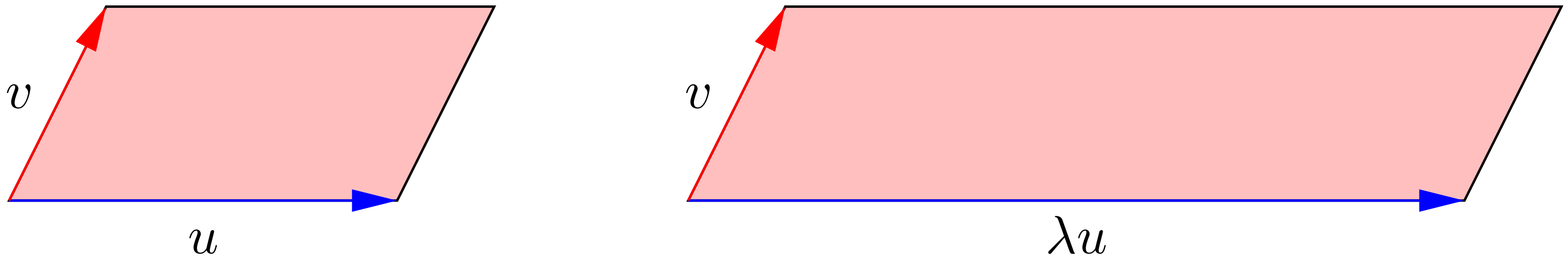




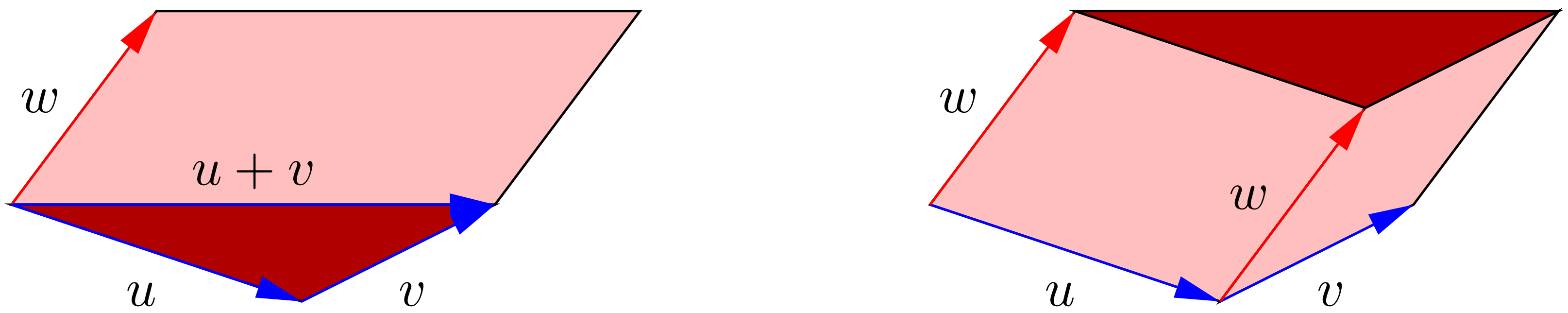


Bilinéarité du déterminant

$$\det(\lambda u, v) = \lambda \det(u, v)$$



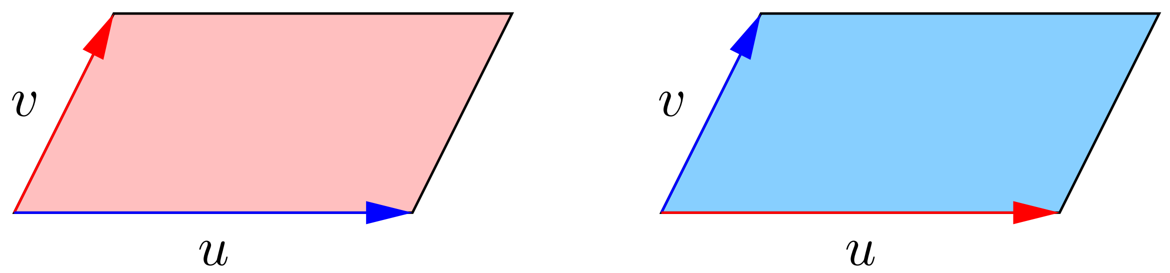
$$\det(u + v, w) = \det(u, w) + \det(v, w)$$



Pour montrer que $\det(u, \lambda v) = \lambda \det(u, v)$ et $\det(u, v + w) = \det(u, v) + \det(u, w)$, on utilise l'antisymétrie du déterminant.

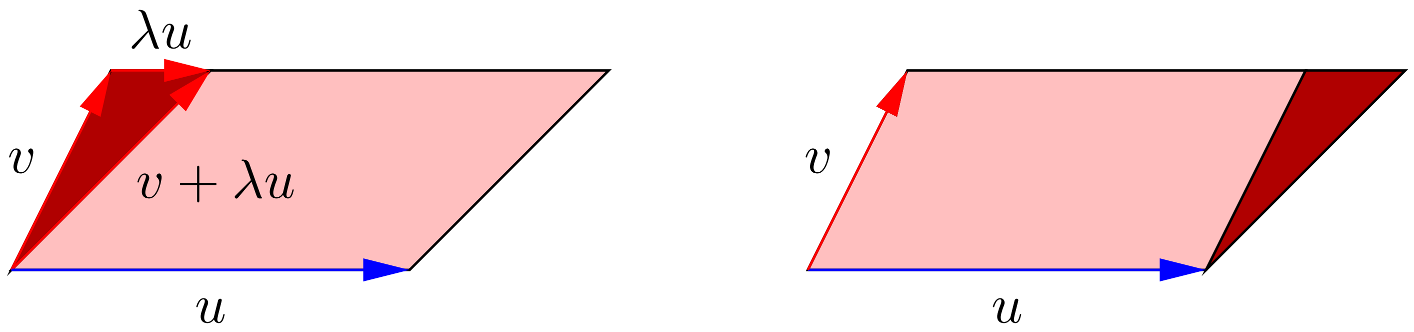
Antisymétrie du déterminant

$$\det(v,u) = -\det(u,v)$$

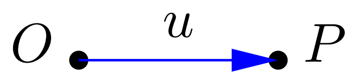


Quelques conséquences de l'antisymétrie du déterminant :

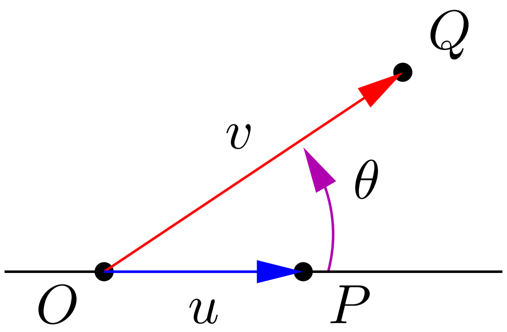
$$\det(u,u) = 0 \qquad \det(u,\lambda u) = 0 \qquad \det(u, v+\lambda u) = \det(u,v)$$



Applications à la géométrie du plan

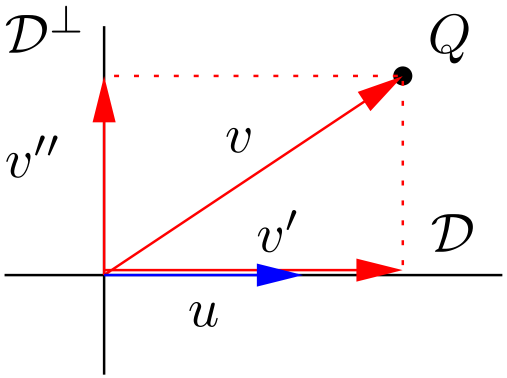


norme : $\|u\| = \mathrm{d}(O, P) = \sqrt{u \cdot u}$



angle : $\widehat{uv} = \widehat{POQ} = \theta \in \,]-\pi, \pi]$ avec

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \qquad \sin\theta = \frac{\det(u, v)}{\|u\|\|v\|}$$



décomposition : $v = v' + v''$ avec $v' \parallel u$ et $v'' \perp u$

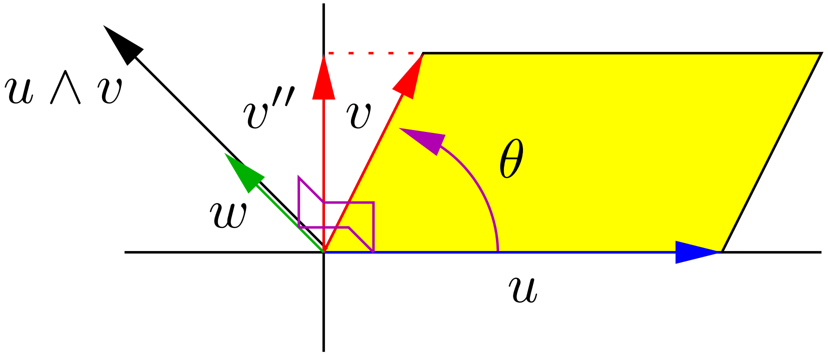
$$v' = \lambda u \text{ où } \lambda = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \qquad v'' = v - v'$$

$$\mathrm{d}(Q, \mathcal{D}^\perp) = \|v'\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|} \qquad \mathrm{d}(Q, \mathcal{D}) = \|v''\| = \frac{|\det(u, v)|}{\|u\|}$$

Conséquence de Pythagore : $(u \cdot v)^2 + \det(u, v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$

Produit vectoriel

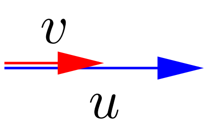
$u \wedge v = \|u\|\|v''\|w$ où v'' est le projeté orthogonal de v sur l'axe orthogonal à u dans le plan défini par u et v, et w est le vecteur unitaire orthogonal à u et v pour lequel v est à gauche de u.

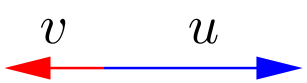


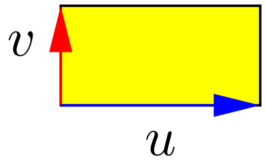
Remarque : $\|u \wedge v\|$ est l'aire du parallélogramme défini par u et v.

$u \wedge v \perp u \qquad u \wedge v \perp v \qquad \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| \sin \theta \qquad \|u \wedge v\| \leq \|u\|\|v\|$

$u \wedge v = \vec{0}$ ssi $u \parallel v$ $\qquad$ $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$ ssi $u \perp v$







Bilinéarité du produit vectoriel

$$\lambda u \wedge v = \lambda(u \wedge v) = u \wedge \lambda v$$

$$(u + v) \wedge w = u \wedge v + u \wedge w$$

$$u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$$

Antisymétrie du produit vectoriel

$$v \wedge u = -u \wedge v$$

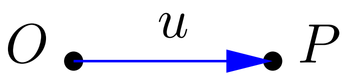
Quelques conséquences de l'antisymétrie du produit vectoriel :

$$u \wedge u = \vec{0} \qquad u \wedge \lambda u = \vec{0} \qquad u \wedge (v + \lambda u) = u \wedge v$$

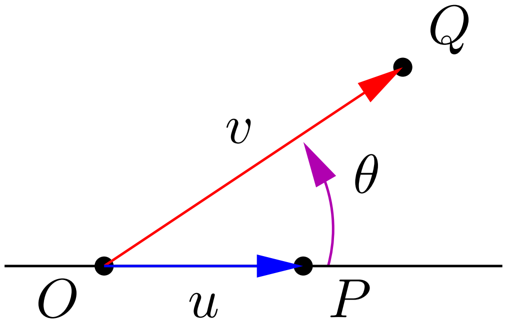
Associativité du produit vectoriel

NON

Applications à la géométrie de l'espace

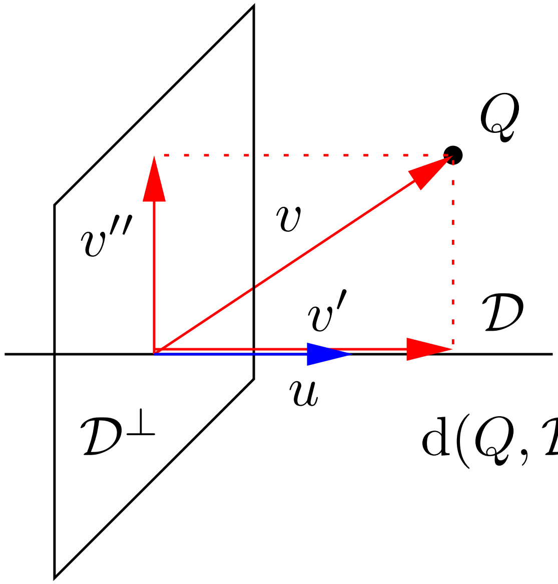


norme : $\|u\| = \mathrm{d}(O, P) = \sqrt{u \cdot u}$



angle : $\widehat{uv} = \widehat{POQ} = \theta \in [0, \pi]$ avec

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \qquad \sin\theta = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\|\|v\|}$$



décomposition : $v = v' + v''$ avec $v' \parallel u$ et $v'' \perp u$

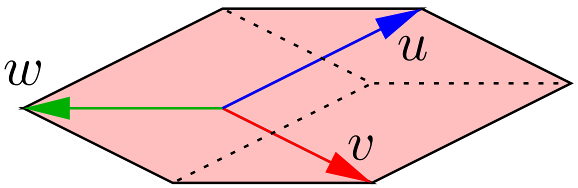
$$v' = \lambda u \text{ où } \lambda = \frac{u \cdot v}{u \cdot u} = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} \qquad v'' = v - v'$$

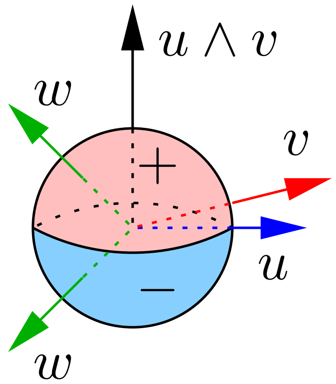
$$\mathrm{d}(Q, \mathcal{D}^\perp) = \|v'\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|} \qquad \mathrm{d}(Q, \mathcal{D}) = \|v''\| = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\|}$$

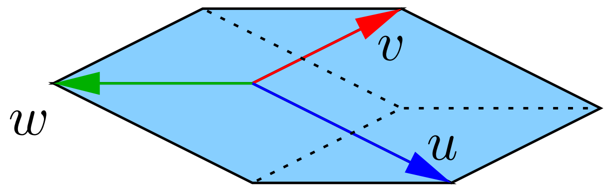
Conséquence de Pythagore : $(u \cdot v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2$

Déterminant de trois vecteurs de l'espace

$\det(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w$





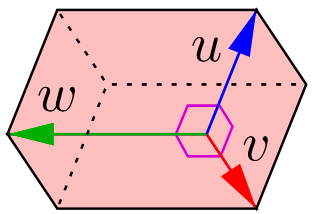


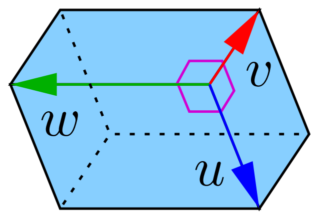
Remarque : $|\det(u, v, w)|$ est le volume du parallélépipède défini par u, v, et w.

$$|\det(u, v, w)| \leq \|u\|\|v\|\|w\|$$

$\det(u, v, w) = 0$ ssi u, v, et w sont coplanaires

$|\det(u, v, w)| = \|u\|\|v\|\|w\|$ ssi u, v, et w sont orthogonaux deux à deux





Trilinéarité du déterminant

$$\det(\lambda u, v, w) = \det(u, \lambda v, w) = \det(u, v, \lambda w) = \lambda \det(u, v, w)$$

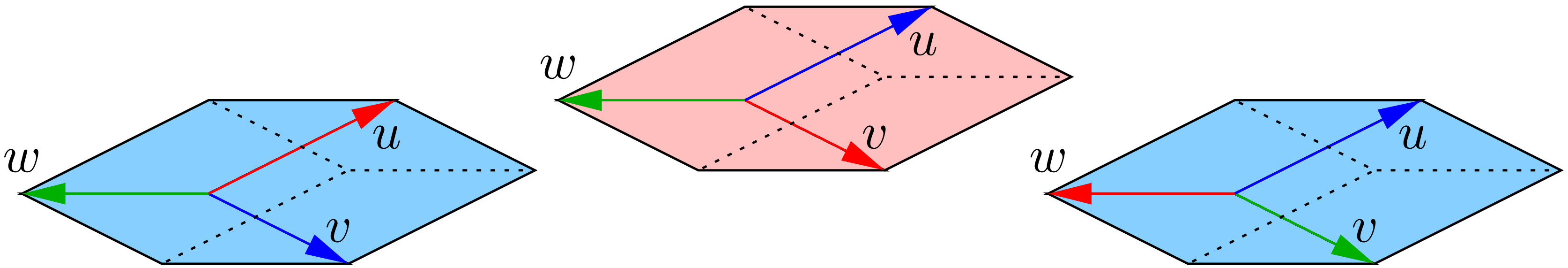
$$\det(u + u', v, w) = \det(u, v, w) + \det(u', v, w)$$

$$\det(u, v + v', w) = \det(u, v, w) + \det(u, v', w)$$

$$\det(u, v, w + w') = \det(u, v, w) + \det(u, v, w')$$

Antisymétrie du déterminant

$$\det(v, u, w) = -\det(u, v, w) = \det(u, w, v)$$



Conséquence : $\det(u, v, w) = \det(v, w, u) = \det(w, u, v)$