Quelques représentations géométriques du calcul

Yves Lafont
Faculté des Sciences de Luminy
Institut de Mathématiques de Luminy

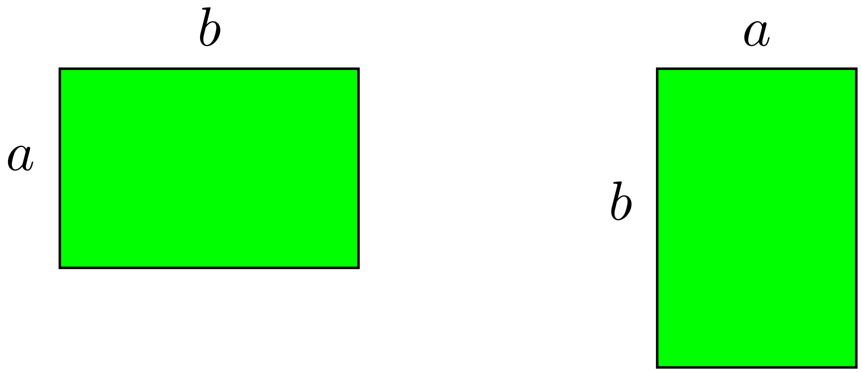
1 juillet 2003

1 Algèbre élémentaire

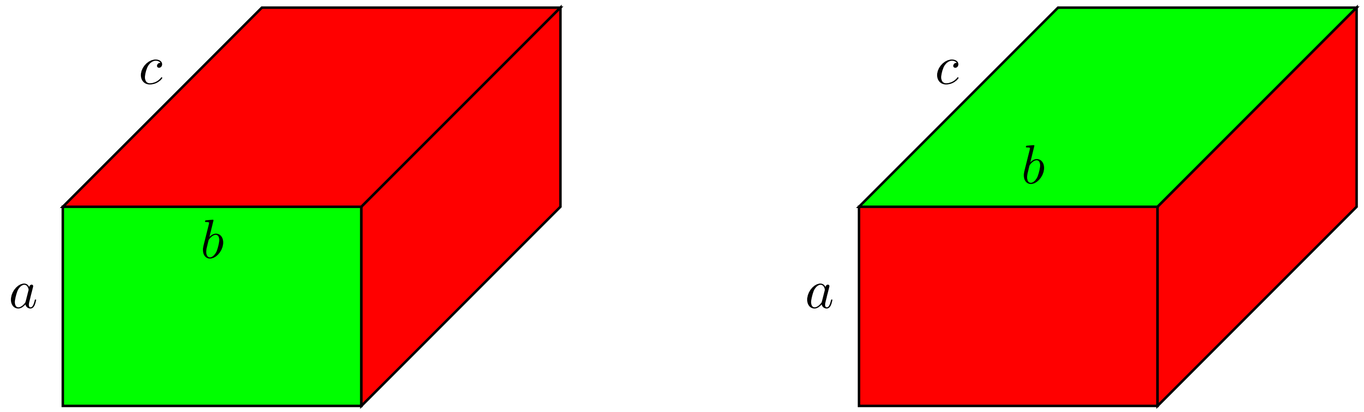
Commutativité de l'addition : $a + b = b + a$

Associativité de l'addition : $(a + b) + c = a + (b + c)$

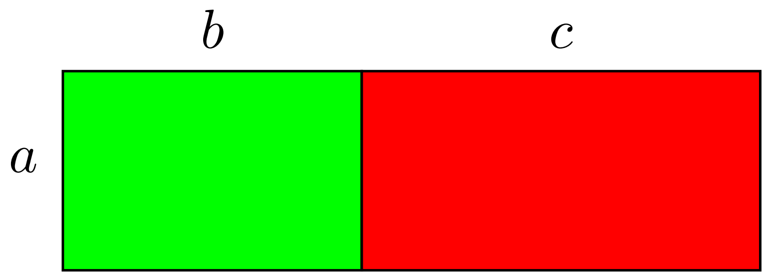
Commutativité de la multiplication : $ab = ba$



Associativité de la multiplication : $(ab)c = a(bc)$

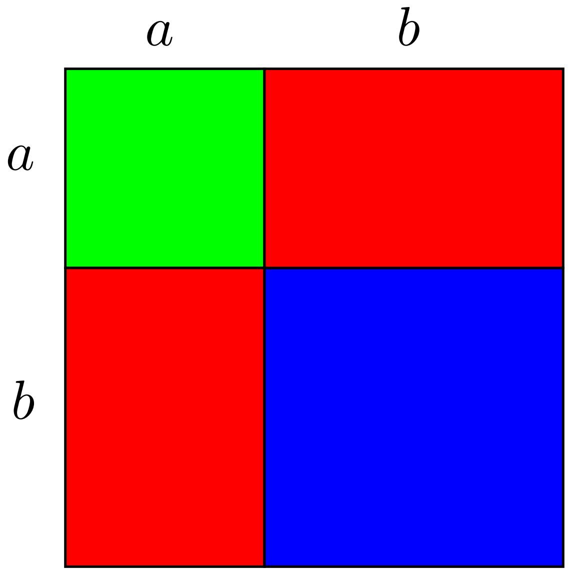


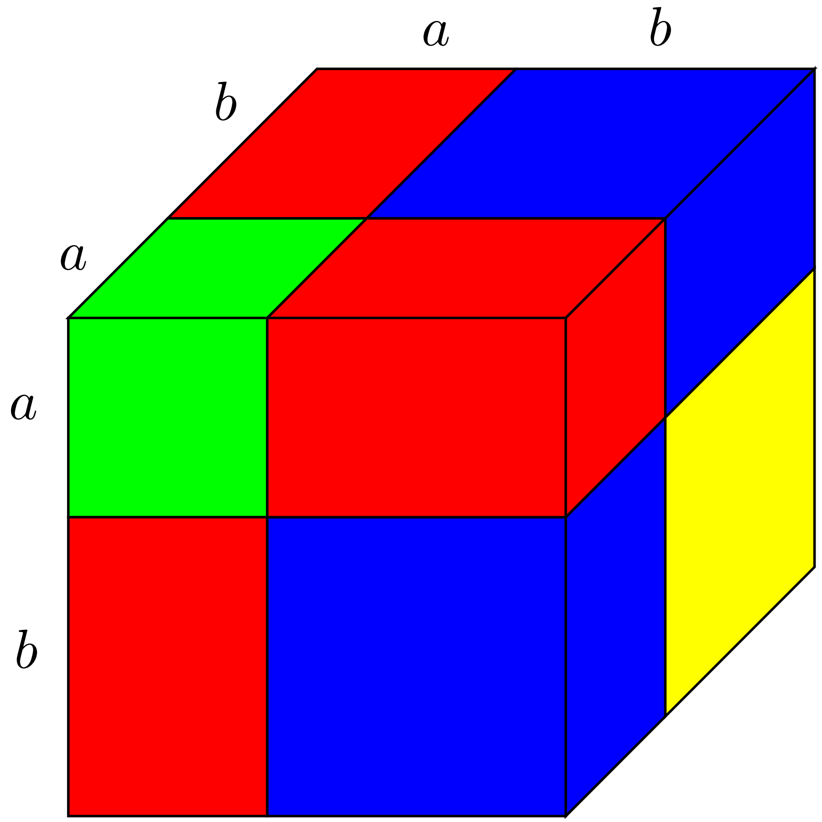
Distributivité de la multiplication sur l'addition : $a(b + c) = ab + ac$



Deux identités remarquables : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

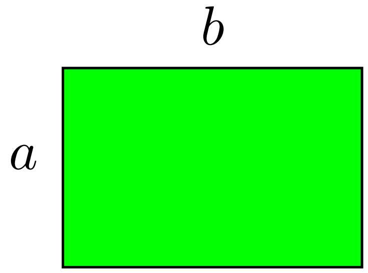
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



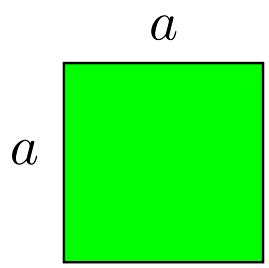


2 Aires de polygones simples

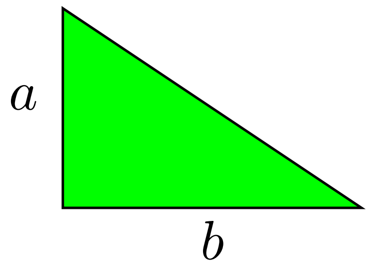
Aire d'un rectangle : ab

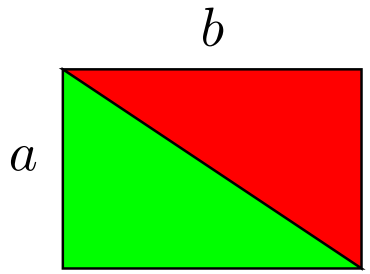


Aire d'un carré : a^2

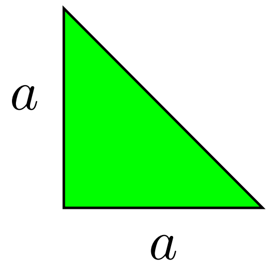


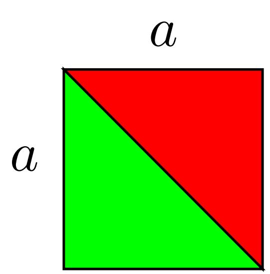
Aire d'un triangle rectangle : $\dfrac{ab}{2}$



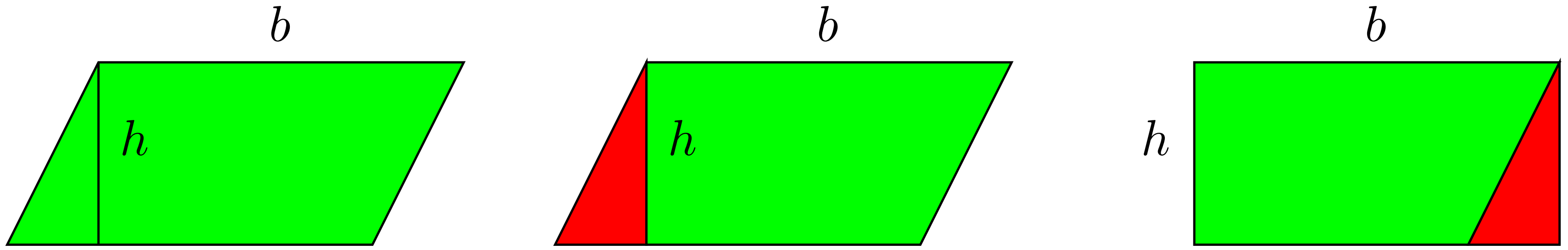


Aire d'un triangle rectangle isocèle : $\dfrac{a^2}{2}$

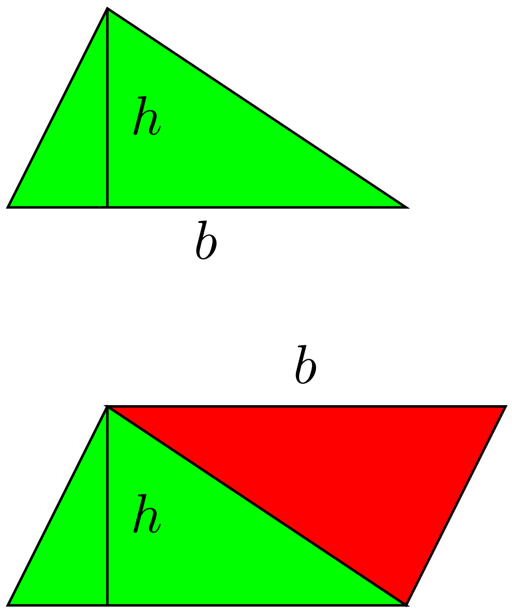




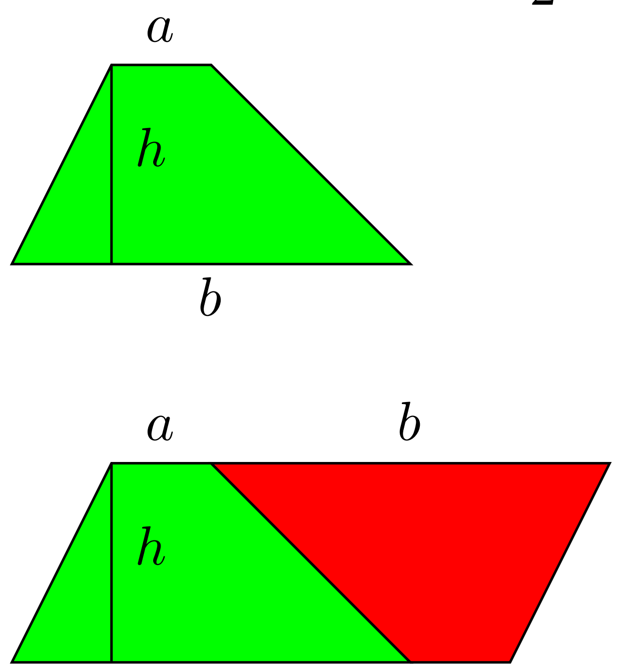
Aire d’un parallélogramme : hb



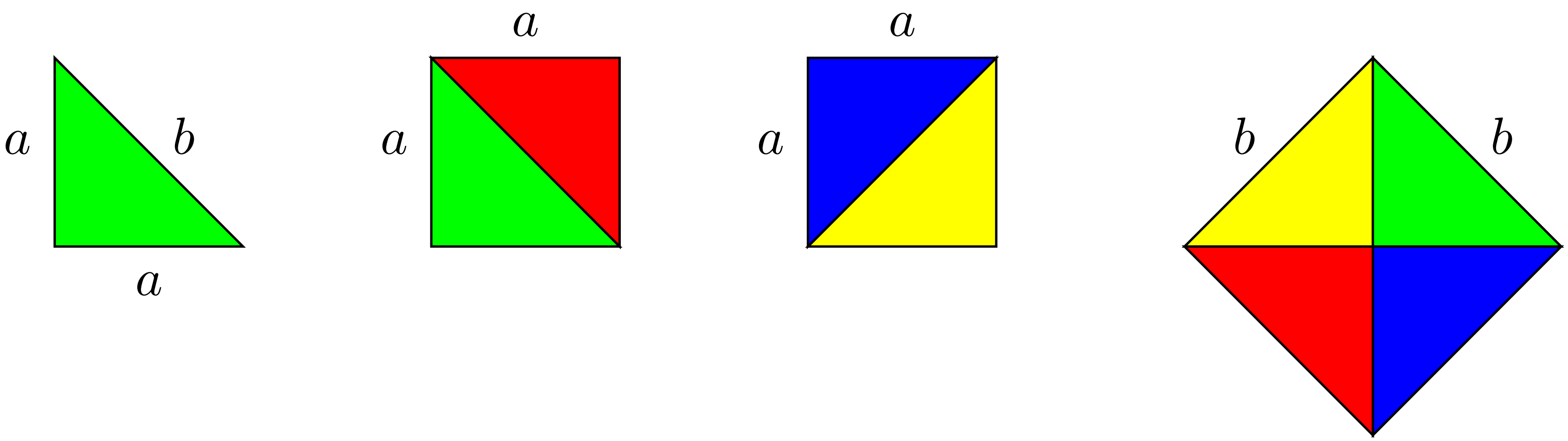
Aire d’un triangle : $\frac{hb}{2}$



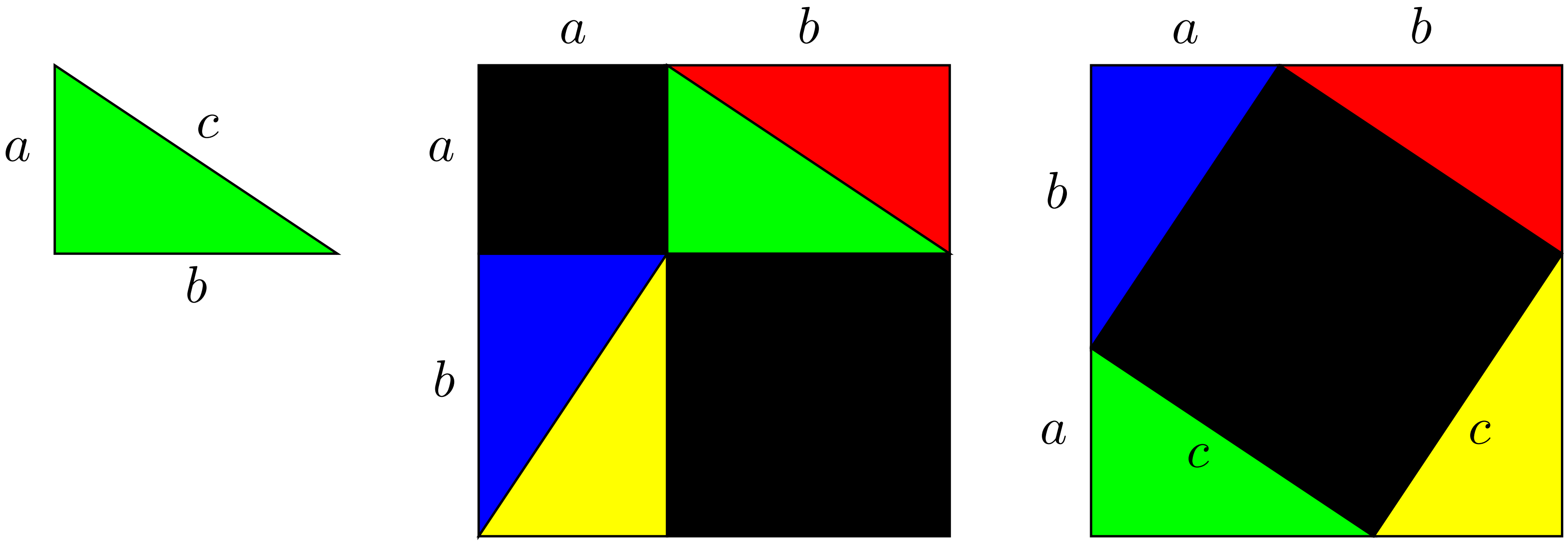
Aire d’un trapèze : $\frac{h(a+b)}{2}$



Théorème de Pythagore pour un triangle rectangle isocèle : $2a^2 = b^2$

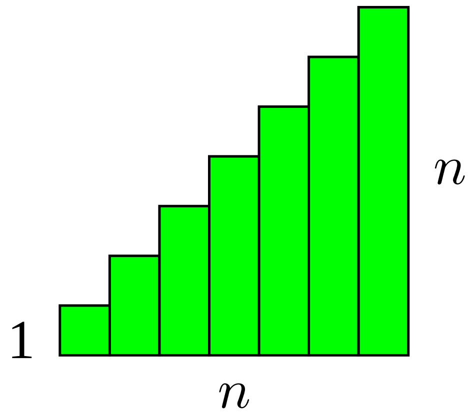


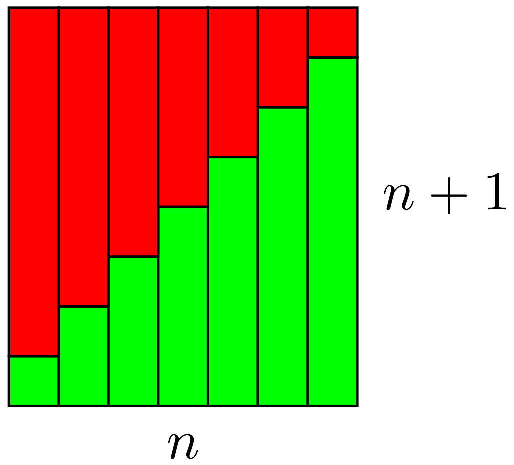
Théorème de Pythagore pour un triangle rectangle quelconque : $a^2 + b^2 = c^2$



3 Séries finies

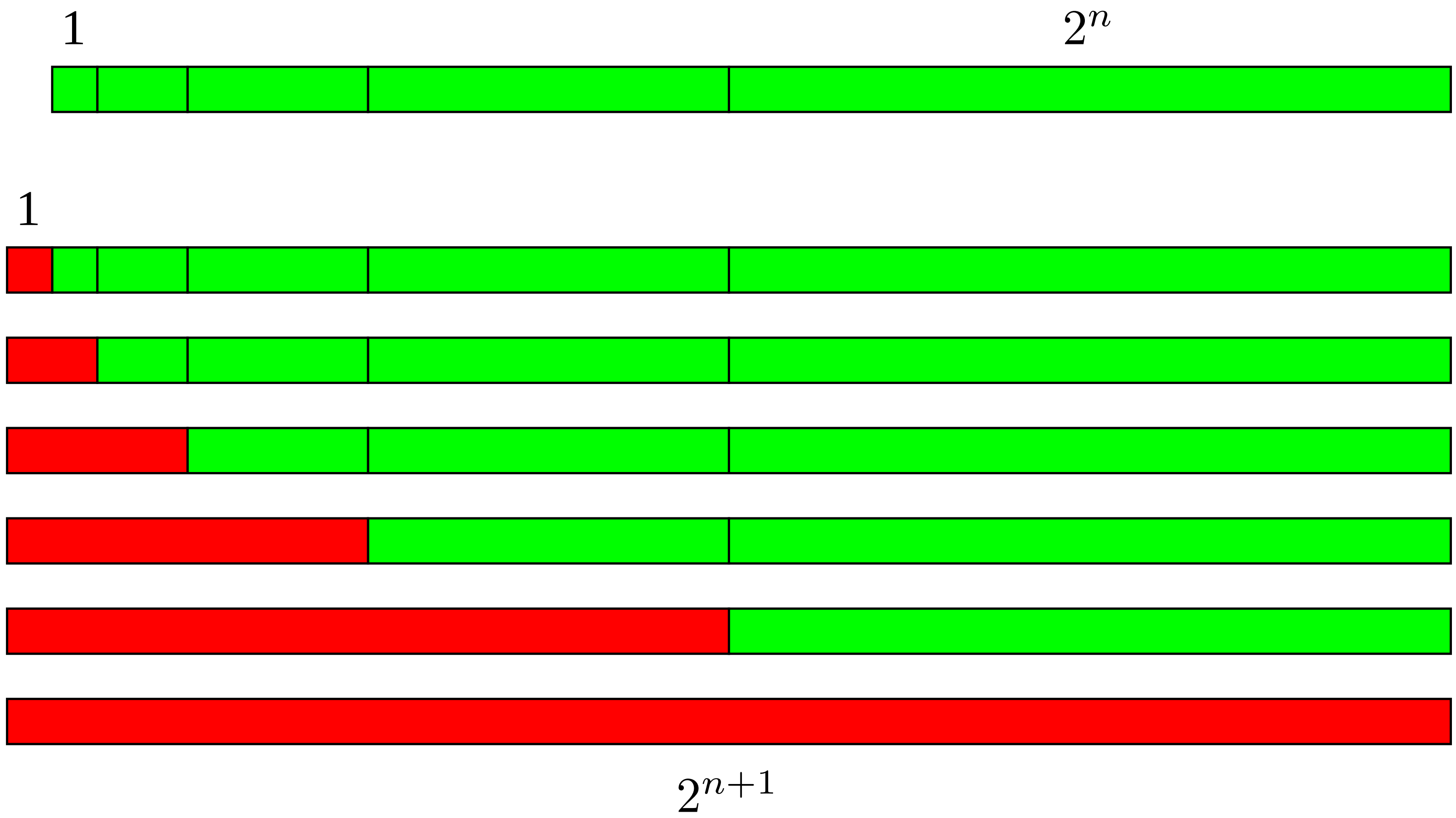
Série arithmétique de raison 1 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$





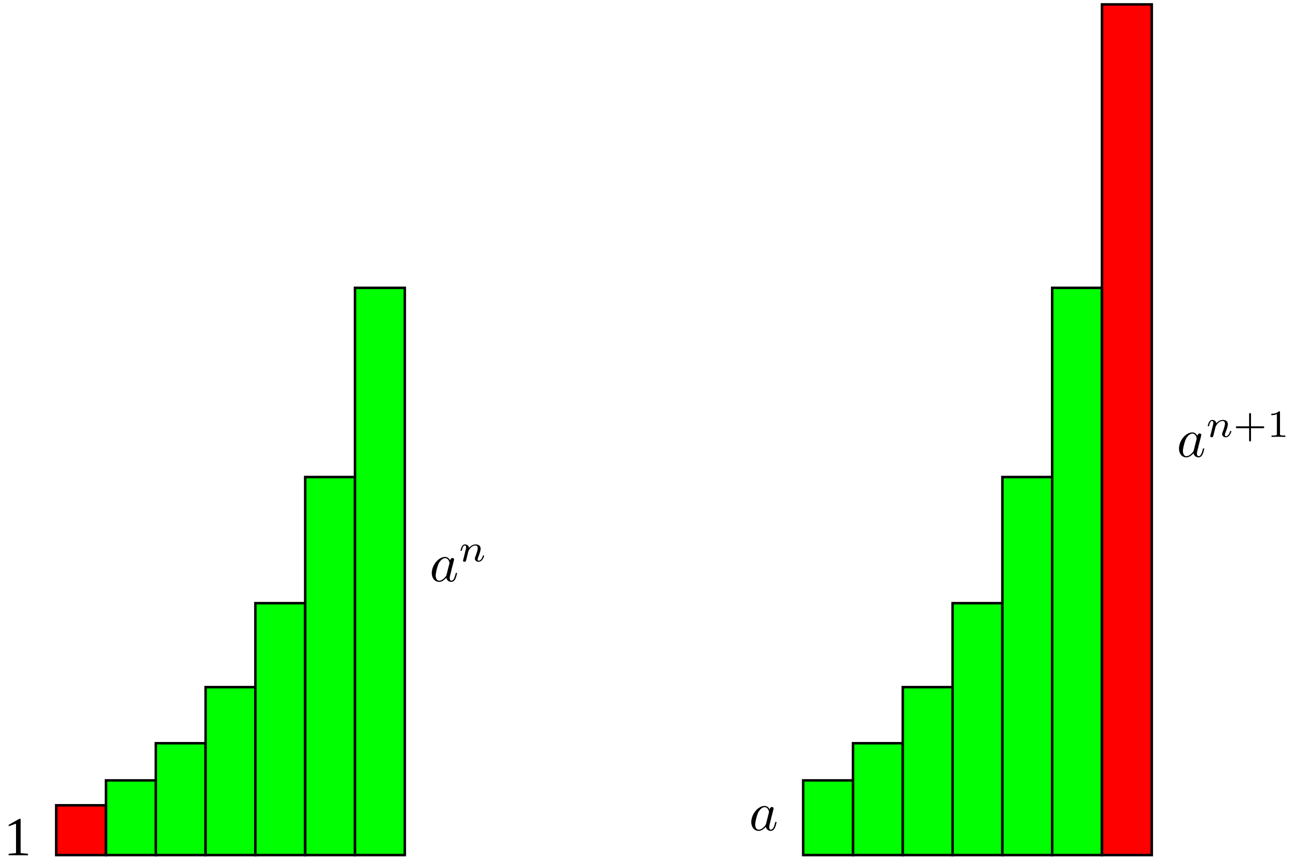
$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 & & \\
+ & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & & \\
\hline
= & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & + & 8 & = & 7 \times 8
\end{array}
$$

Série géométrique de raison 2 : $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$



$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111 = 100000 - 1$ (en base 2)

Série géométrique de raison $a \neq 1$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$

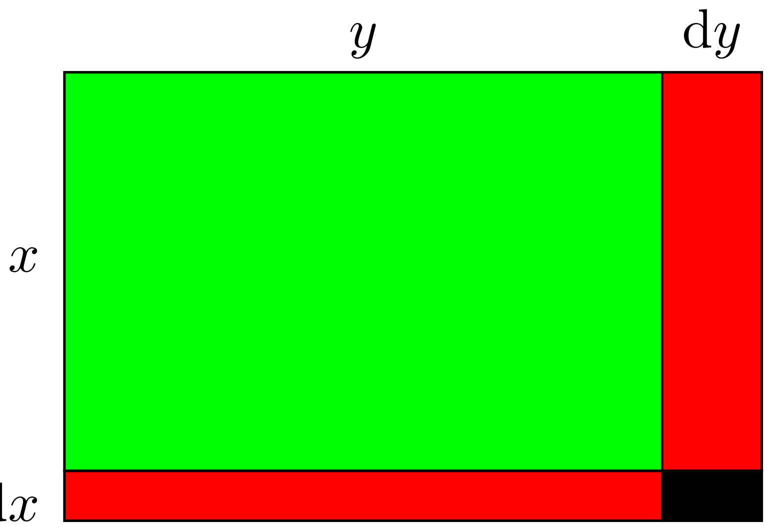


$$
\begin{aligned}
(a-1)(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6) = {} & \qquad a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 \\
& -1 - a - a^2 - a^3 - a^4 - a^5 - a^6 \\
= {} & a^7 - 1
\end{aligned}
$$

4 Calcul différentiel

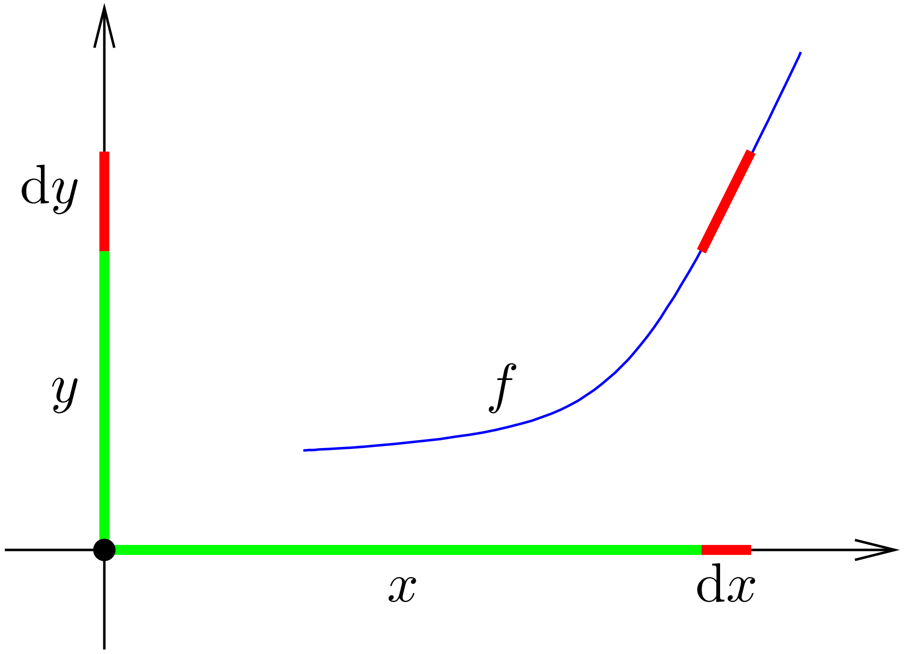
Somme : si $z = x + y$, alors $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

Produit : si $z = xy$, alors $\mathrm{d}z = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ (règle de Leibnitz)

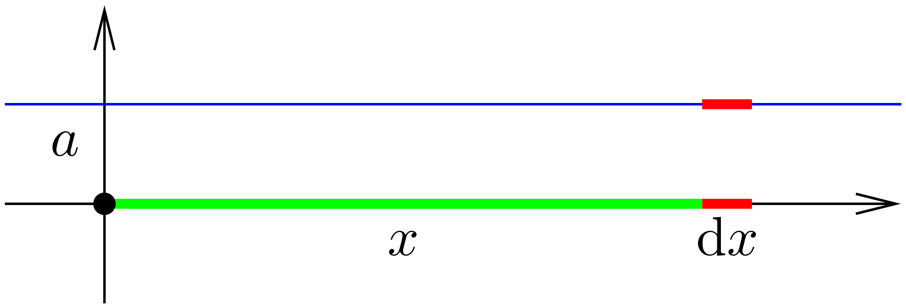


Cas particulier : si a est une constante et $y = ax$, alors $\mathrm{d}y = a\,\mathrm{d}x$

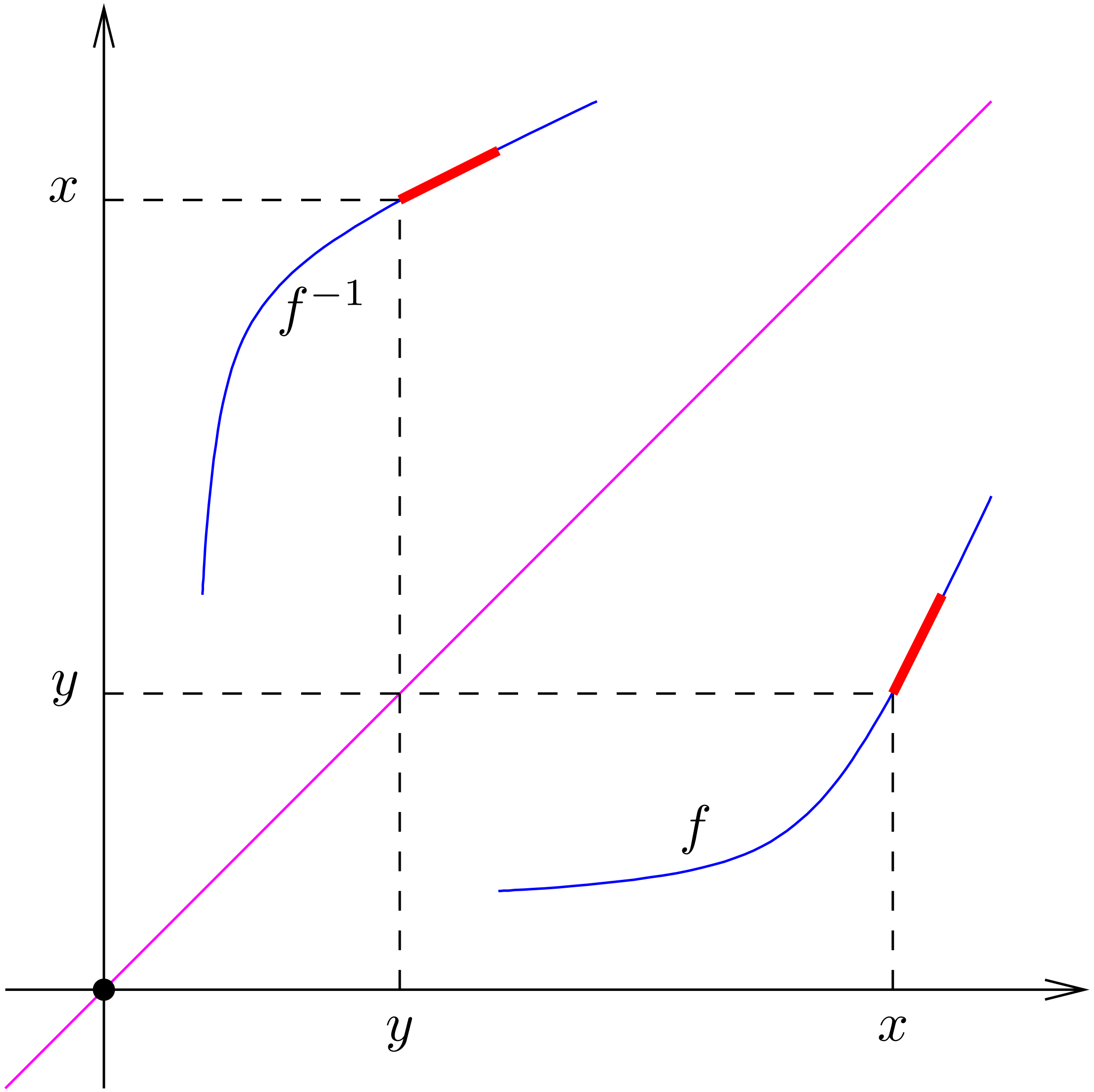
Fonction : si $y = f(x)$, alors $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$



Cas particulier : si a est une constante, alors $\mathrm{d}a = 0$



Dérivée d'une réciproque : si $g = f^{-1}$ et $x = g(y)$, alors $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(g(y))}$



$$x = g(y)$$

$$y = f(x)$$

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{f'(x)} = \frac{\mathrm{d}y}{f'(g(y))}$$

Exercices

1. Trouver une représentation géométrique pour l'identité suivante :

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

2. Quelle est l'aire d'un losange de hauteur h et de largeur l ?

Dans le cas où $h = l$, retrouver cette aire à partir de celle d'un carré de côté a.

3. Calculer les expressions suivantes :

$$\sum_{i=p}^{q} i \qquad \sum_{i=p}^{q} a^i \qquad \prod_{i=1}^{n} a^i$$

4. Trouver des représentations géométriques pour le calcul des dérivées des fonctions suivantes (a est une constante) :

$$f(x) + a \qquad f(x+a) \qquad af(x) \qquad f(ax)$$