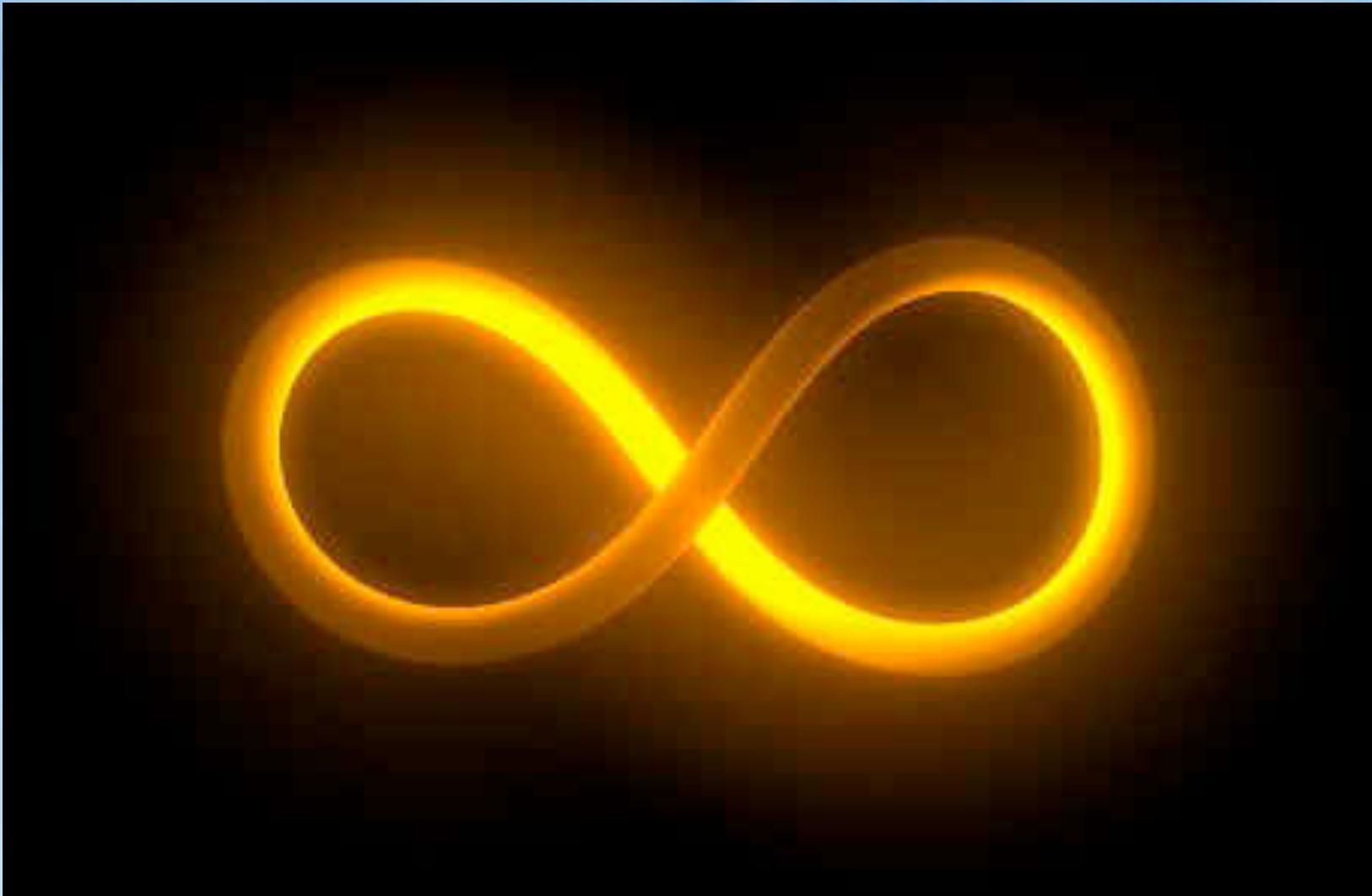


Pour en finir avec l'infini

Yves Lafont

Institut de Mathématiques de Luminy
Université de la Méditerranée
(Aix-Marseille 2)

Symbole 1 : cycle



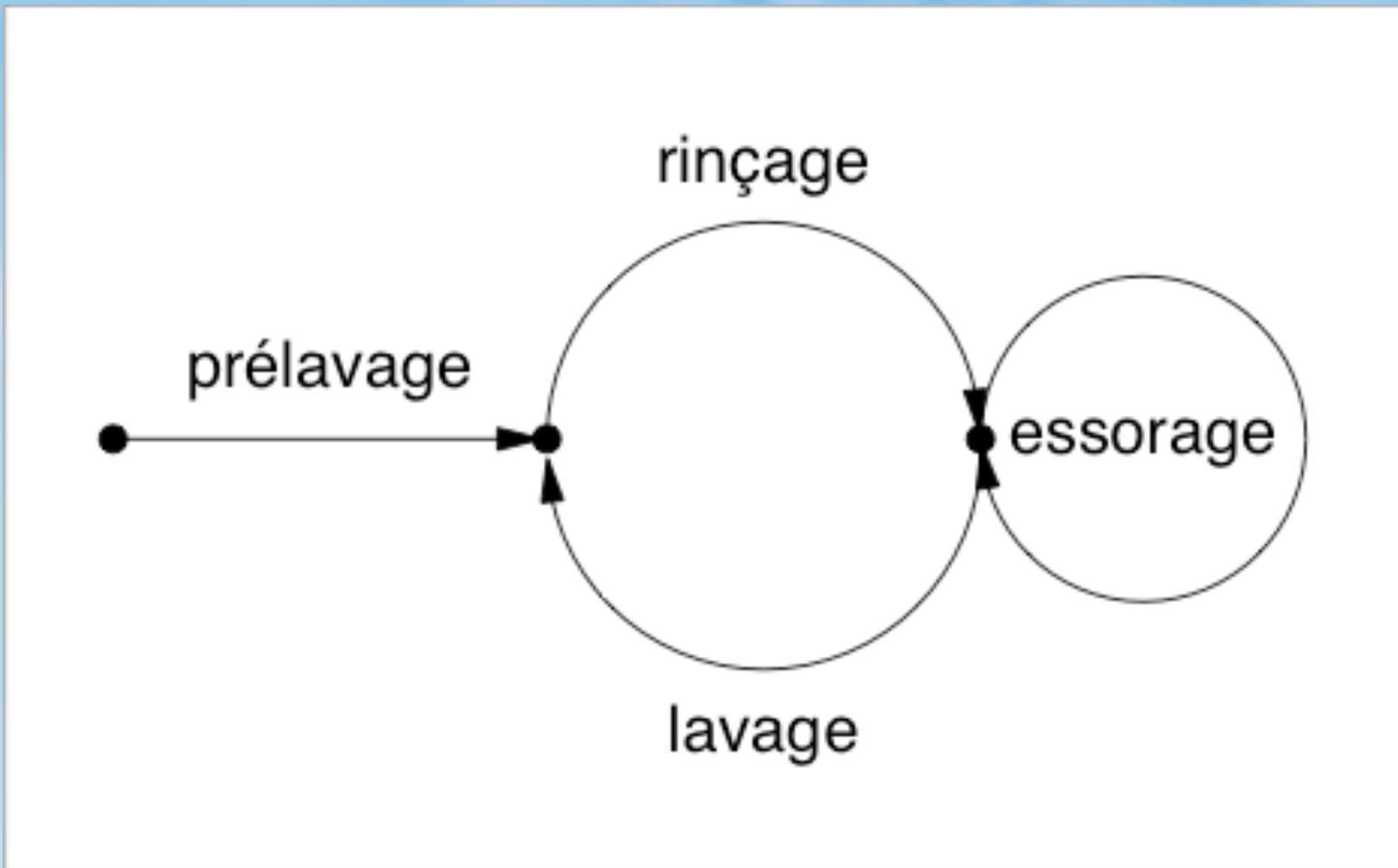
Cycles familiers

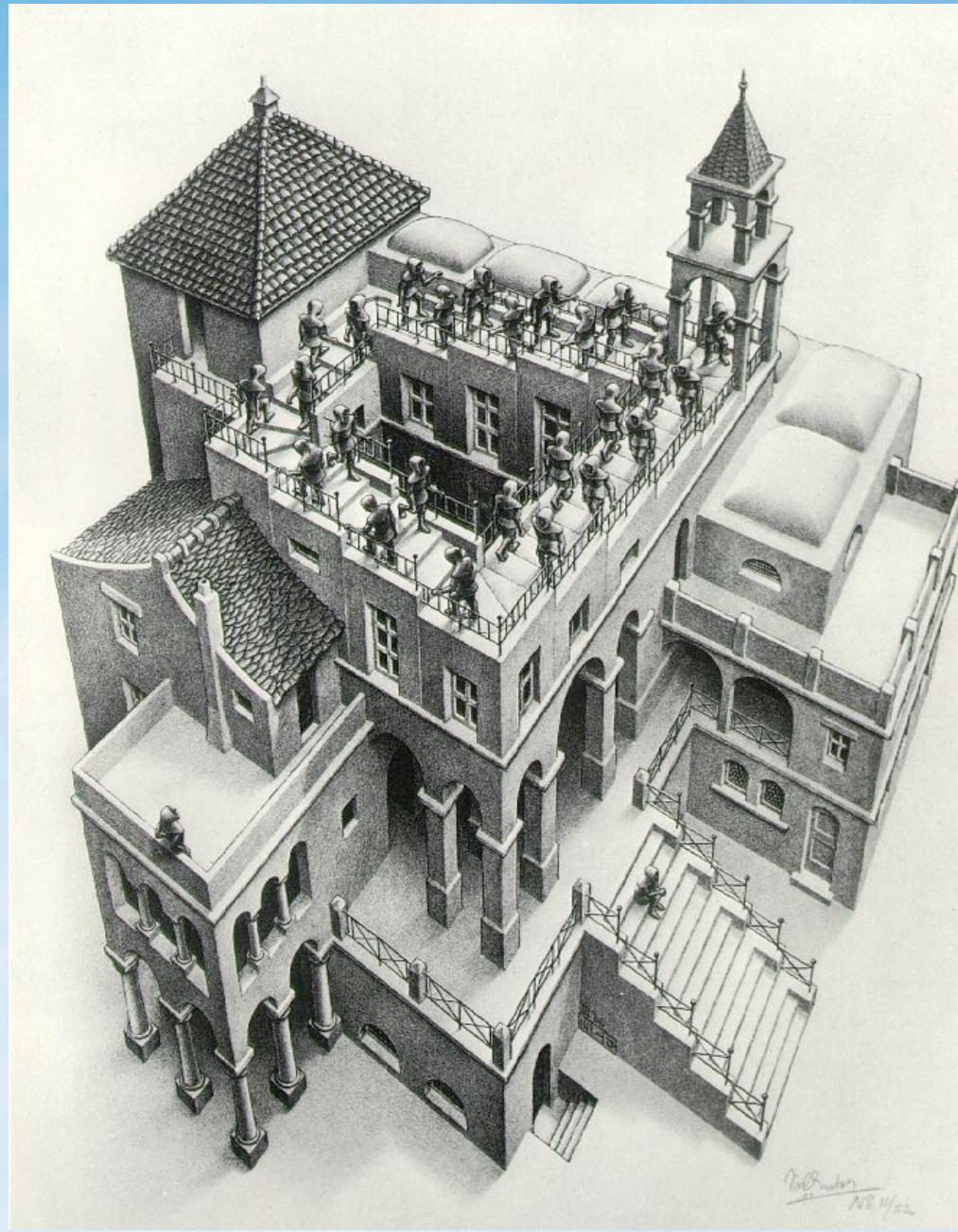
- Cycles naturels des astres (jours, mois, ans)
- Cycles mécaniques des horloges
- Cycles biologiques des générations
- Cycles scolaires ou universitaires
- Cycles de conférences

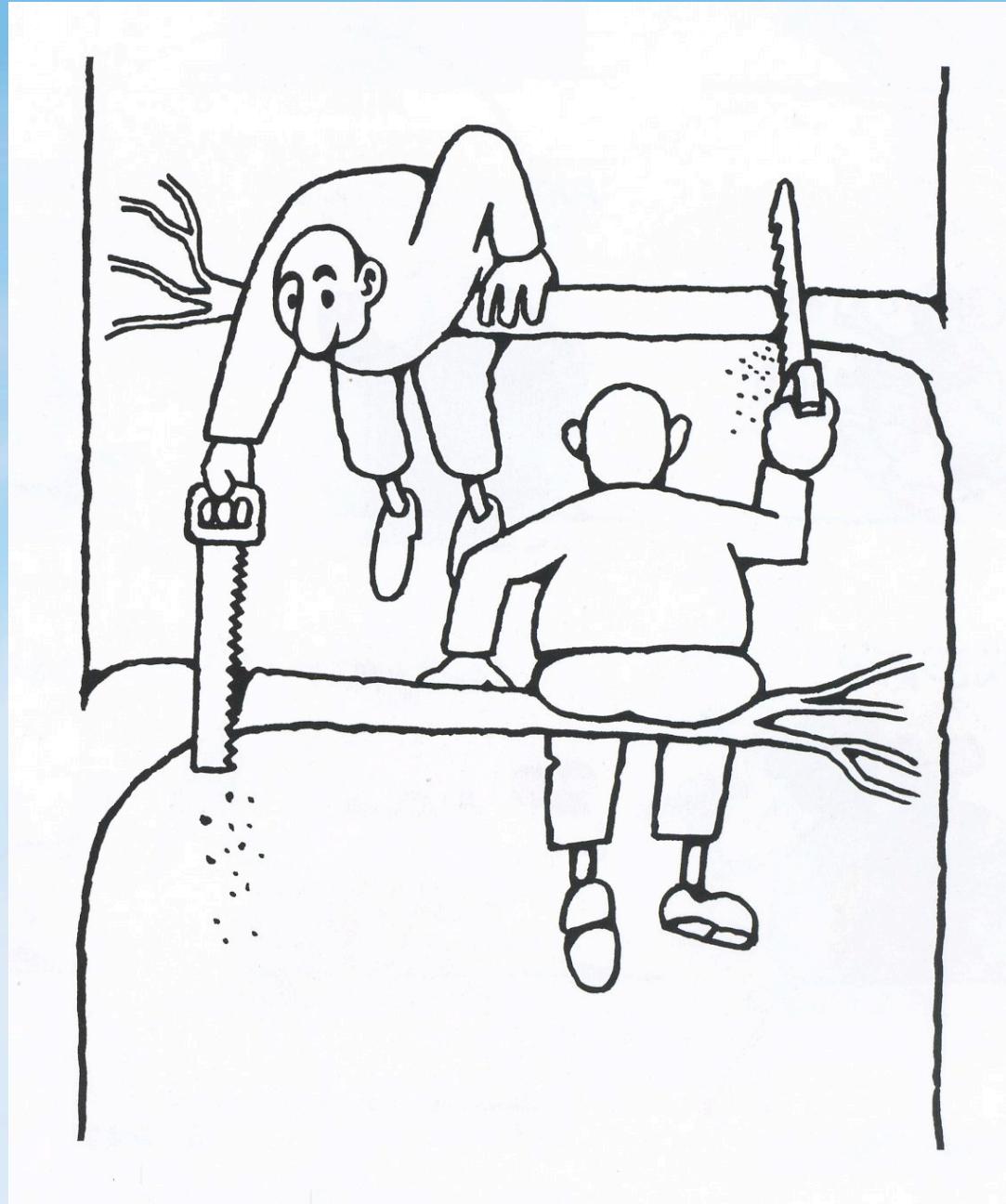
Cycles en mathématiques

- Cinématique : rotation autour d'un point
- Géométrie : paramétrage angulaire du cercle
- Topologie : revêtement universel du cercle
- Algèbre : générateur du groupe des entiers
- Algorithmique : instruction de boucle

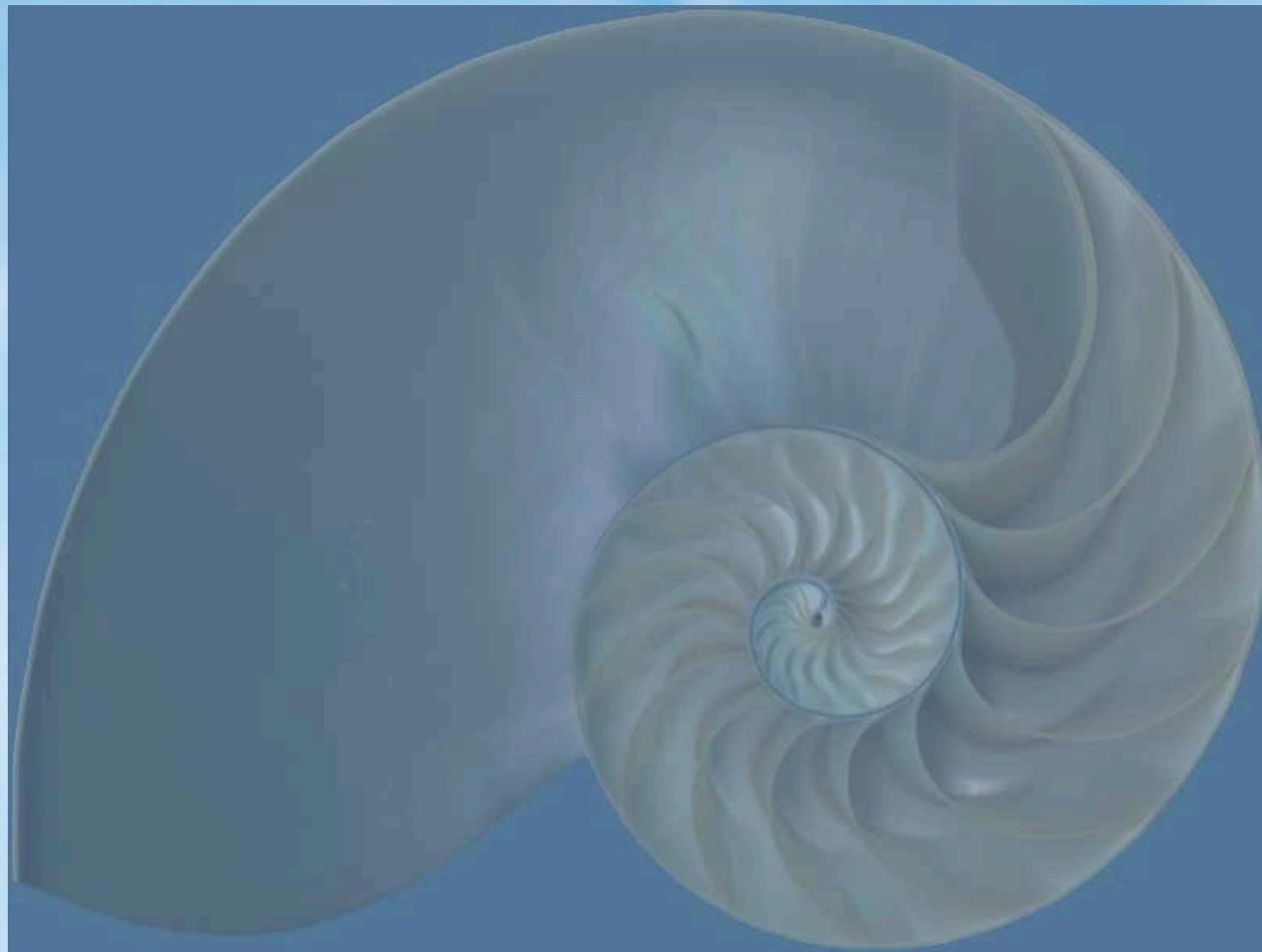
Automate

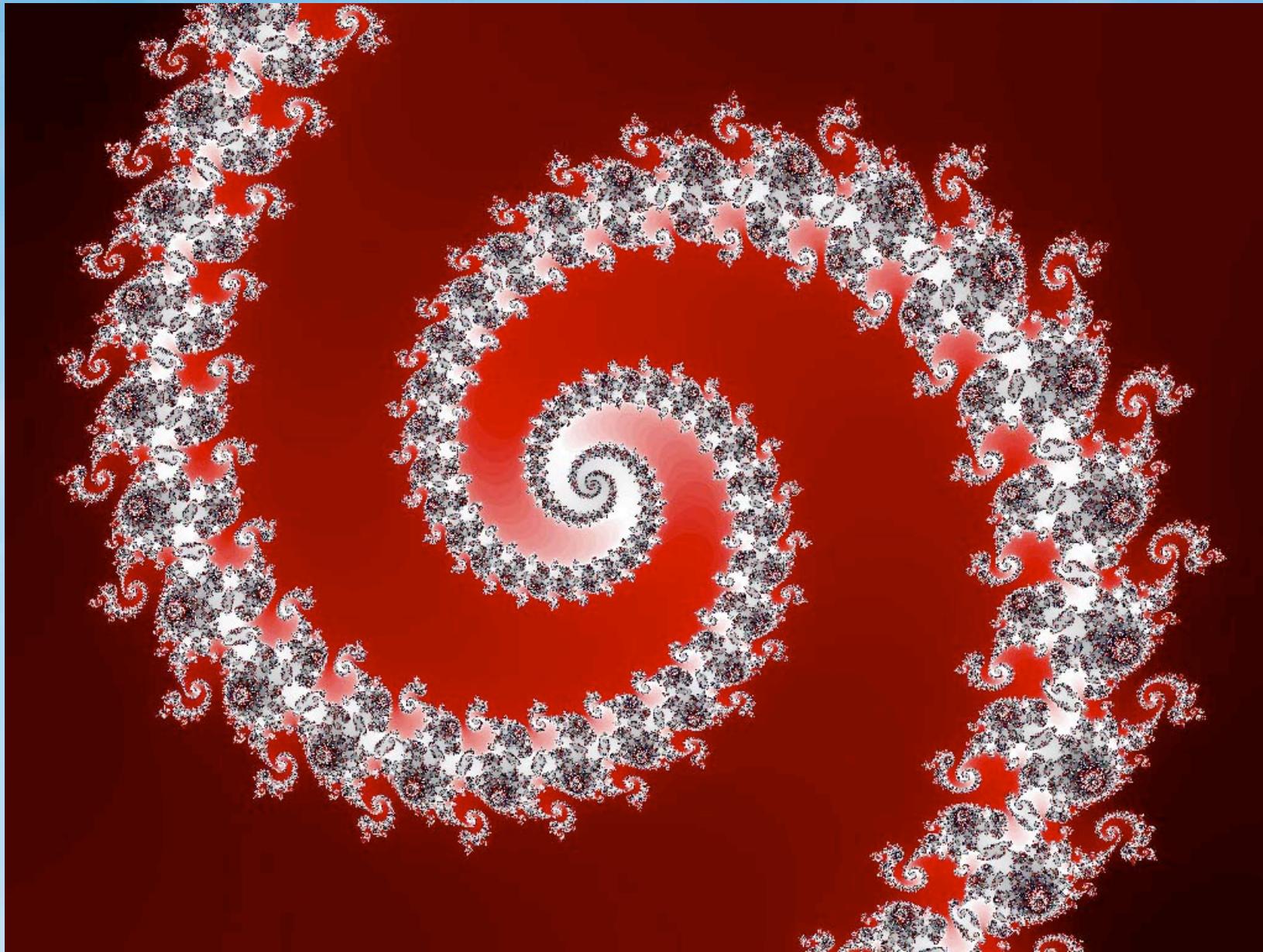






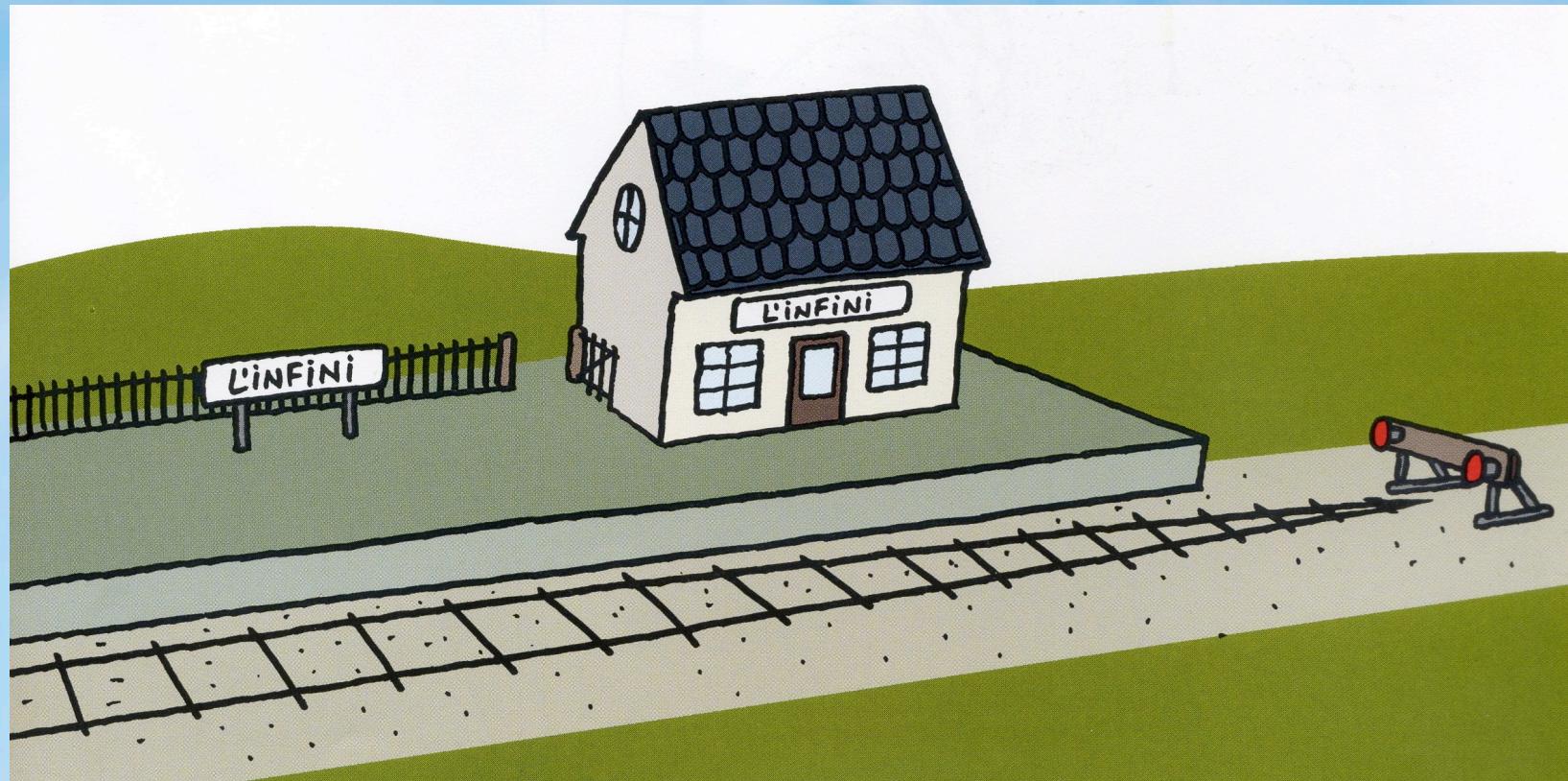
Symbole 2 : spirale





Symbole 3 : point de fuite





Fondements de l'analyse

L'inverse $1/x$ échange 0 et l'infini :

$1, 2, 3, \dots, n, \dots$ devient $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$

(infiniment petit = infiniment grand)

Série infinie dont la somme est finie :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots = 1$$

(paradoxe de Zénon)

Symbol 4 : abyme





Dénombrements

- Combien y a-t-il d'étoiles ?
- Combien y a-t-il de livres ?

- Combien y a-t-il de points ?
- Combien y a-t-il de nombres ?





L'hôtel de Hilbert

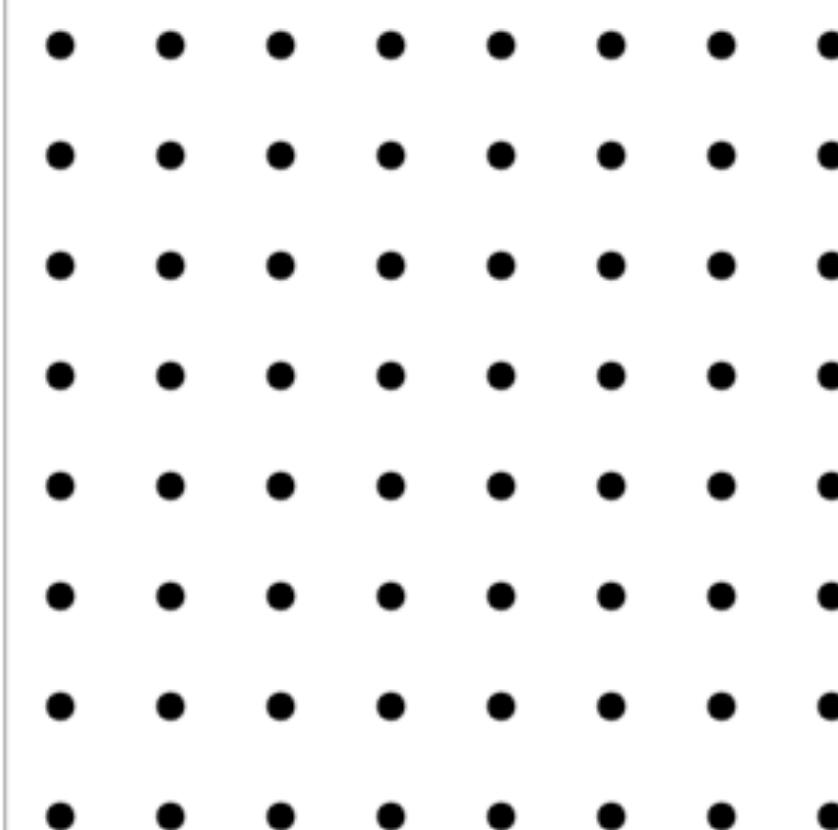
L'hôtel est complet, mais il est infini.

Arrive un client.

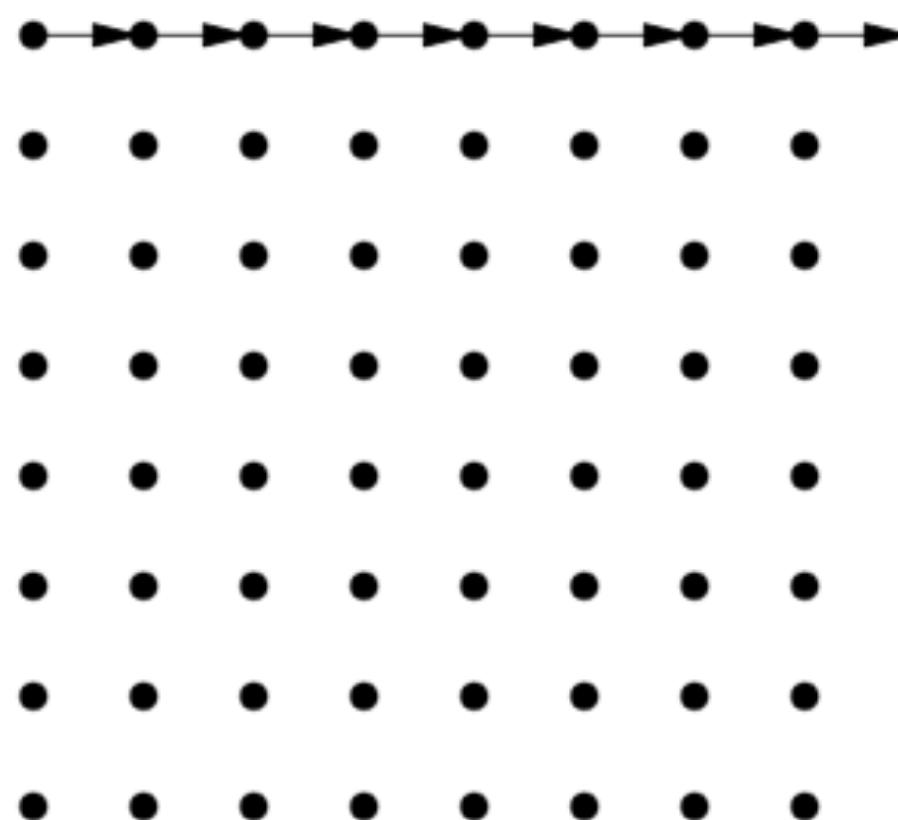
Arrive un autocar infini.

Arrive une infinité d'autocars infinis.

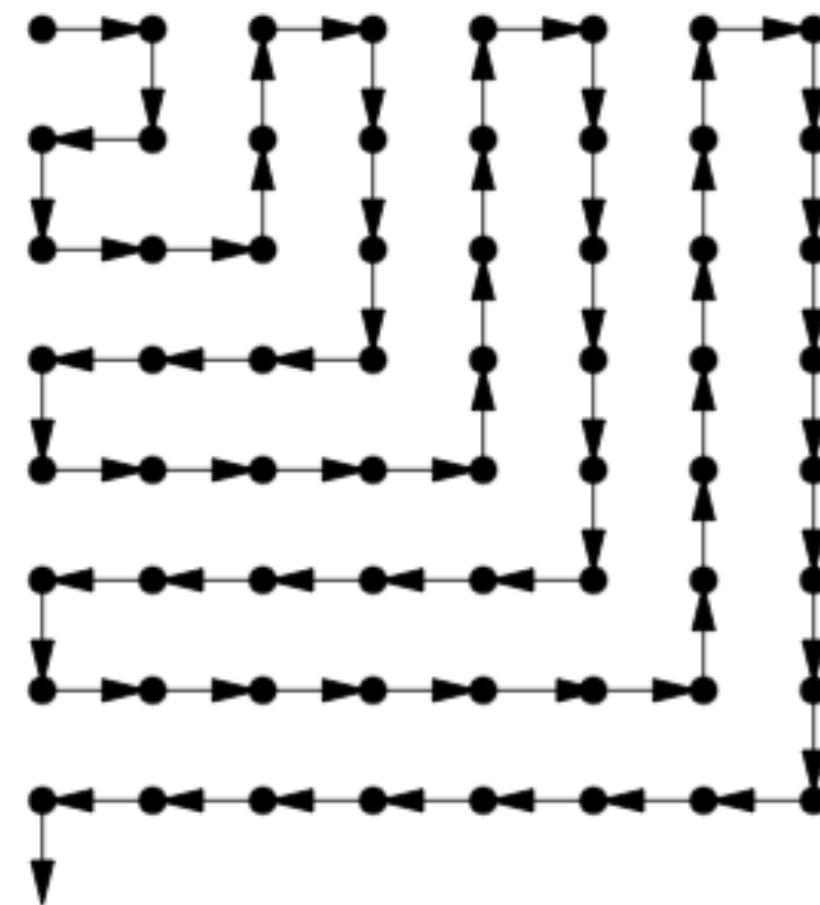
Il faut passer partout :



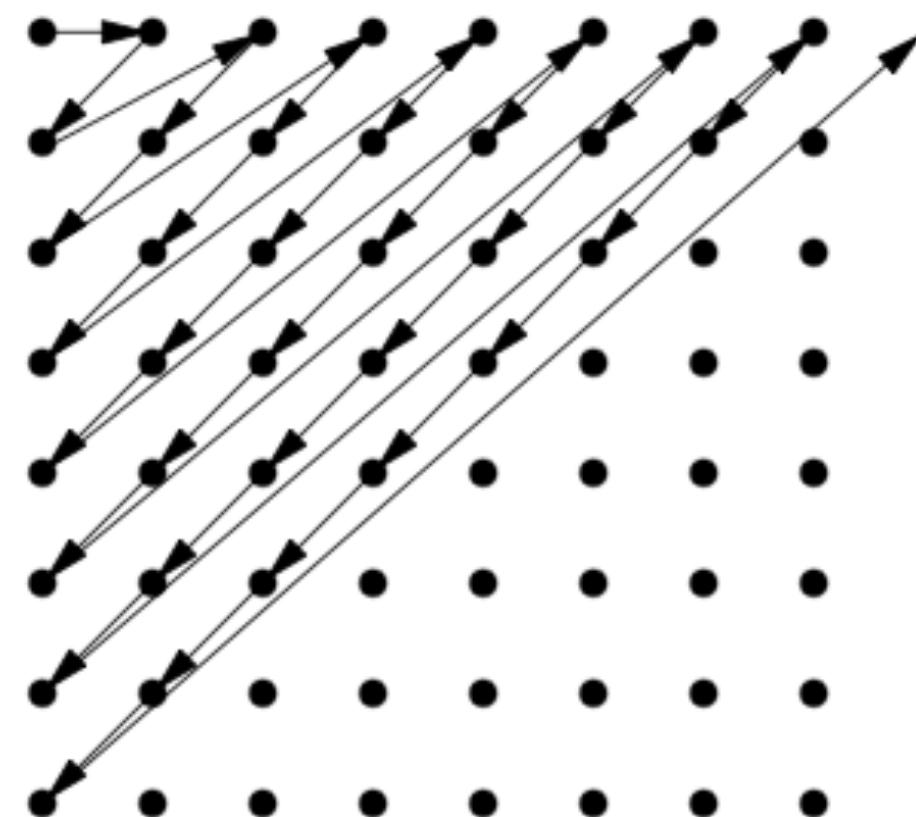
Mauvaise réponse :



Bonne réponse :



Autre bonne réponse :



Arithmétique infinie

Soit N un cardinal infini :

$$N + 1 = N$$

$$2 \times N = N + N = N$$

$$N^2 = N \times N = N$$

$$2^N > N$$

(diagonalisation de Cantor)

Représentation des réels

Un nombre réel a une infinité de décimales.

Exemple : 3,141592653589793238462...

Idem en base 2 (arithmétique des ordinateurs).

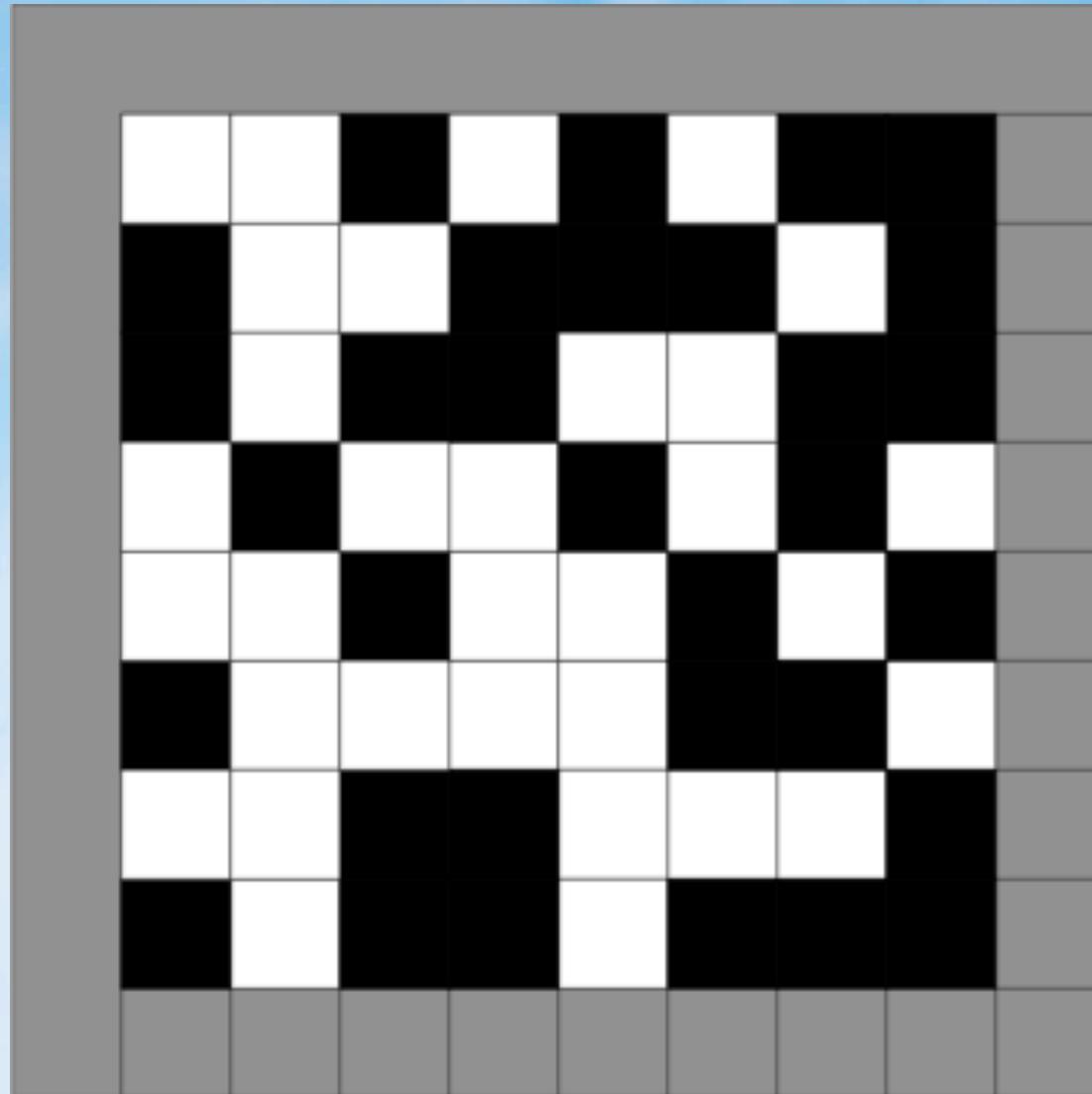
Exemple : 11,00100100001111110110...

Donc il y a plus de nombres réels que d'entiers.

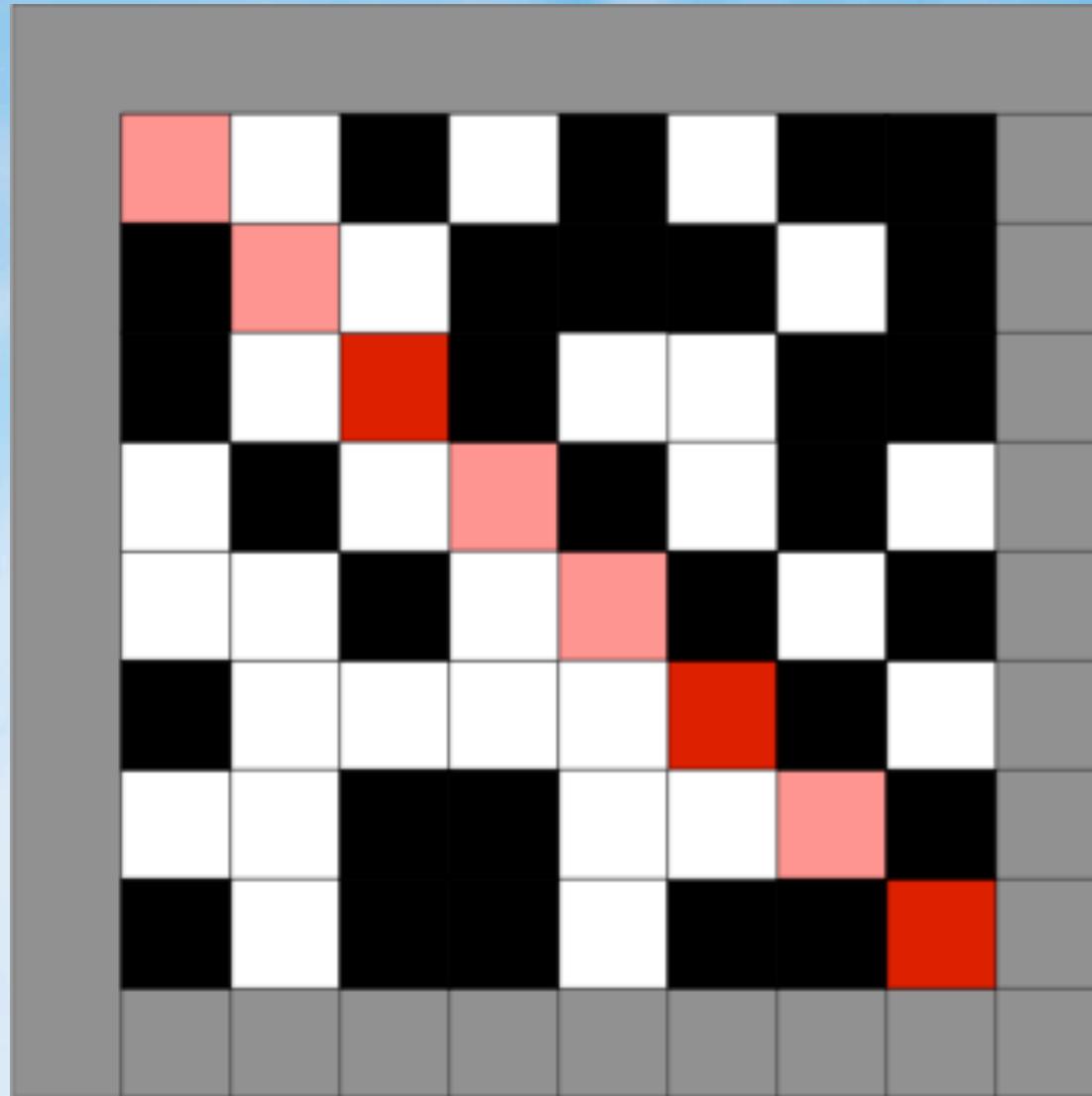
Il faut écrire toutes les suites :



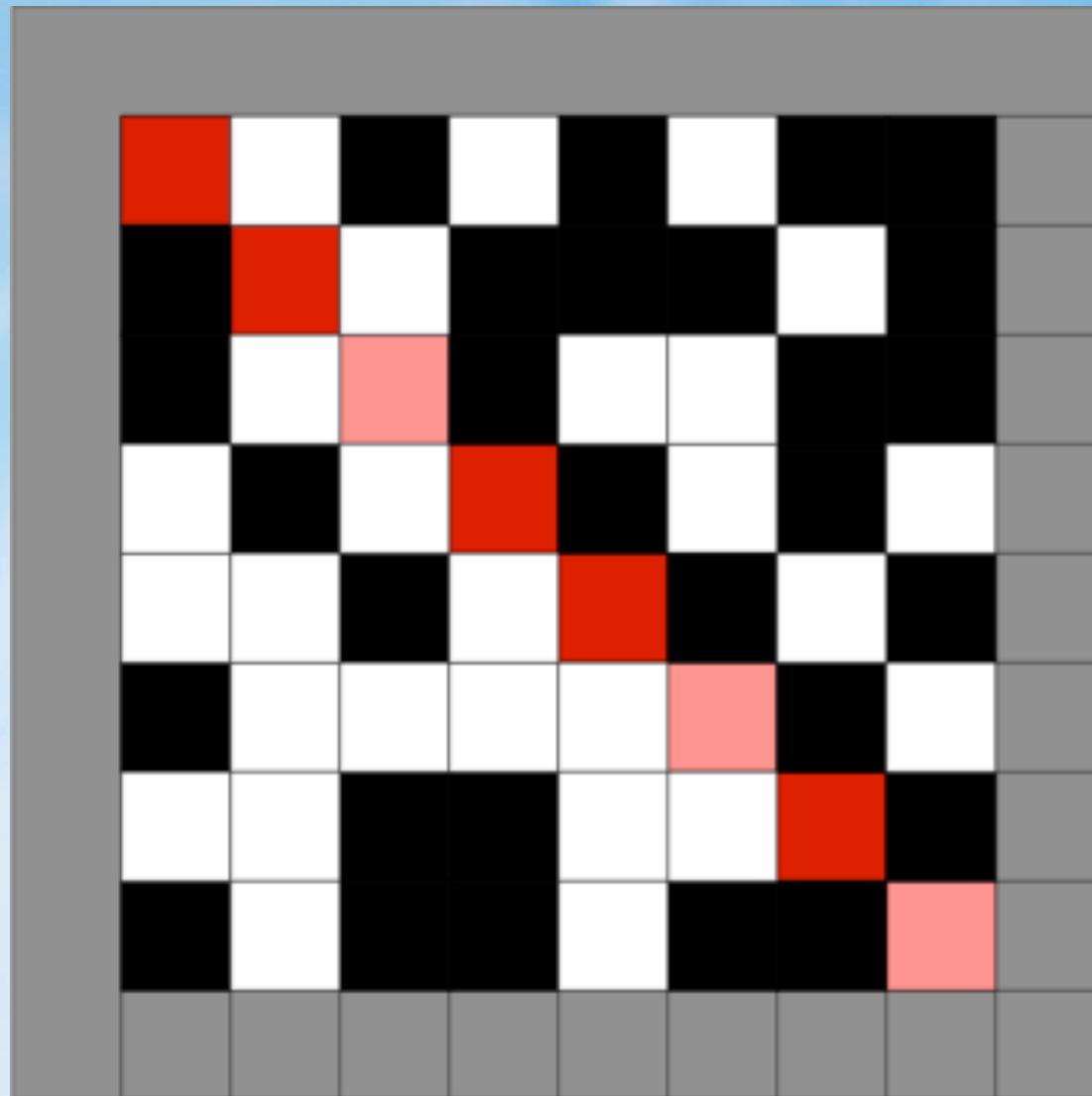
Une proposition :



Diagonalisation de Cantor :



Cette suite n'apparaît pas :



Autres diagonalisations

Logique : énoncés vrais mais indémontrables

Théorème d'incomplétude de Goedel

Calcul : problèmes indécidables

Machines de Turing

Théorie de la complexité algorithmique

La Bibliothèque de Babel (Borges)

La Bibliothèque contient tous les livres.

Les livres ont tous la même taille, mais :

Comment les numéroter, les cataloguer ?

La bibliothèque de Babel est-elle infinie ?

A quoi sert une telle bibliothèque ?

