A.1 Isométries vectorielles du plan

1. $\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v) = u^2+v^2+2u\cdot v$
$\Rightarrow u\cdot v = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f(u)\cdot f(v) &= \tfrac{1}{2}(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) \\ &= u\cdot v \end{aligned}$$

f conserve donc le produit scalaire.

2. f conserve la norme ; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ étant de norme 1, $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ le sont également.
f conserve le produit scalaire ; puisque $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, alors $f(\vec{i})\cdot f(\vec{j})=0$.
$f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$ sont donc orthogonaux et unitaires.

3. $f(\vec{i}) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $f(\vec{j}) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

La condition de normalité s'exprime par les équations :

$$\|f(\vec{i})\| = 1,\ \|f(\vec{j})\| = 1 \Rightarrow a^2+c^2=1,\ b^2+d^2=1$$

La condition d'orthogonalité s'exprime par l'équation :

$$f(\vec{i})\cdot f(\vec{j}) = 0 \Rightarrow ab+cd=0$$

4. Soit f une application dont la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie les conditions précédentes et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. Alors $f(u) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$.
$\|f(u)\|^2 = (ax+by)^2+(cx+dy)^2 = (a^2+c^2)x^2+(b^2+d^2)y^2+2(ab+cd)xy = x^2+y^2 = \|u\|$.
f conserve la norme et est une isométrie vectorielle.

5. La somme des carrés des éléments de chaque colonne donne $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$.
La seconde condition s'exprime, pour R_θ et S_θ, par $\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) = 0$.
R_θ et S_θ vérifient les conditions.

6. Soit A une matrice vérifiant les conditions. Alors il existe θ_1 et θ_2 $(-\pi < \theta_1, \theta_2 \leq \pi)$ tels que $a = \cos(\theta_1)$, $c = \sin(\theta_1)$, $b = \sin(\theta_2)$, $d = \cos(\theta_2)$ (d'après les conditions de normalité). De plus, la condition d'orthogonalité donne $\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)+\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) = 0$.
D'où $\sin(\theta_1+\theta_2) = 0$. On en déduit que $\theta_1+\theta_2 = 0\ mod(\pi)$.
Si $\theta_1+\theta_2 = 0\ mod(2\pi)$, alors $\theta_2 = -\theta_1\ mod(2\pi)$ et $A = R_{\theta_1}$.
Si $\theta_1+\theta_2 = \pi\ mod(2\pi)$, alors $\theta_2 = \pi-\theta_1\ mod(2\pi)$ et $A = S_{\theta_1}$.

7. $R_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = R_{2\theta}$.
$S_\theta^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$.

8. R_θ est la matrice de la rotation de centre O et d'angle θ.
Pour $\theta = 0$ S_θ est la matrice de la symétrie d'axe $\mathbb{R}\vec{i}$; pour $\theta = \pi$ S_θ est la matrice de la symétrie d'axe $\mathbb{R}\vec{j}$.

9. $f(\vec{i}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

Pour $0 < |\theta| < \pi$, $f(\vec{i}) \neq \vec{i}$ et $f(\vec{i}) \neq -\vec{i}$. u et v sont donc non nuls. De plus $u \cdot v = \vec{i}\cdot\vec{i} - \vec{i}\cdot f(\vec{i}) + f(\vec{i})\cdot\vec{i} - f(\vec{i})\cdot f(\vec{i}) = \|\vec{i}\| - \|f(\vec{i})\| = 0$ (car f est une isométrie vectorielle). u et v sont donc orthogonaux.

10. $f(u) = f(\vec{i} + f(\vec{i})) = f(\vec{i}) + f(f(\vec{i})) = f(\vec{i}) + \vec{i}$ (d'après 7.).
De même, on trouve $f(v) = f(\vec{i}) - \vec{i}$.
Donc $f(u) = u$ et $f(v) = -v$; u et v sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 1 et -1.

11. $\|u\|^2 = (1+\cos(\theta))^2 + \sin(\theta)^2 = 2(1+\cos(\theta)) = 4\cos(\frac{\theta}{2})^2$.
On remarque que $1+\cos(\theta) = 2\cos(\frac{\theta}{2})^2$ et que $\sin(\theta) = 2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})$ et on en déduit :

$$u = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{\theta}{2})^2 \\ 2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{u}{\|u\|} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

L'angle entre $\vec{i}$ et u est donc $\frac{\theta}{2}$.

12. S_θ est la matrice de la symétrie axiale d'axe $\mathbb{R}u$.

A.3 Matrices stochastiques

1. On note r_n et d_n les ratios de républicains et de démocrates après n années. Chaque année, 20% de républicains deviennent démocrates et 30% de démocrates deviennent républicains. On en déduit les équations :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= r_n - 0.2r_n + 0.3d_n = 0.8r_n + 0.3d_n \\ d_{n+1} &= d_n + 0.2r_n - 0.3d_n = 0.7d_n + 0.2r_n \end{aligned}$$

On note $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} r_n \\ d_n \end{pmatrix}$.

On a alors $X_{n+1} = AX_n = \begin{pmatrix} 0.8r_n + 0.3d_n \\ 0.7d_n + 0.2r_n \end{pmatrix}$. Par suite,

$X_{n+2} = AX_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.7r_n + 0.45d_n \\ 0.55d_n + 0.3r_n \end{pmatrix}$,

$X_{n+3} = AX_{n+2} = \begin{pmatrix} 0.65r_n + 0.525d_n \\ 0.475d_n + 0.35r_n \end{pmatrix}$,

$X_{n+4} = AX_{n+3} = \begin{pmatrix} 0.625r_n + 0.5325d_n \\ 0.4675d_n + 0.375r_n \end{pmatrix}$

On en déduit que dans $2, 3, 4$ ans, il y aura resectivement $45\%, 52.5\%, 53.25\%$ de démocrates devenus républicains, et $30\%, 35\%, 37.5\%$ de républicains devenus démocrates.

2. Pour que les pourcentages ne changent pas, il suffit de trouver un vecteur X tel que $AX = X$.
Soit $X = \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$. L'équation $AX = X$ donne $\begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8r + 0.3d \\ 0.7d + 0.2r \end{pmatrix}$.

De plus, $r + d = 100\% = 1$. On déduit du système d'équations : $r = \frac{3}{5} = 60\%$ et $s = \frac{2}{5} = 40\%$.

3. $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.45 \\ 0.3 & 0.55 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.525 \\ 0.35 & 0.475 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 0.625 & 0.5325 \\ 0.375 & 0.4675 \end{pmatrix}$.

4. Soient A et B deux matrices stochastiques ; $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$.

Les entrées de A et B étant positives, celles de AB le sont aussi. De plus, $AB = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}$.

L'ajout des termes de la première colonne donne :

$$aa_1 + bc_1 + ca_1 + dc_1 = a_1(a + c) + c_1(b + d) = a_1 + c_1 = 1$$

L'ajout des termes de la seconde colonne donne :

$$ab_1 + bd_1 + cb_1 + dd_1 = b_1(a + c) + d_1(b + d) = b_1 + d_1 = 1$$

AB est donc stochastique.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice stochastique et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur stochastique (i.e $x + y = 1$).
On suppose que $AX = X$; c'est-à-dire $\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On déduit de la première équation que $ax + b(1 - x) = x$, ou encore $x(b + 1 - a) = b$, ou encore $x(b + c) = b$.
Si $b + c \neq 0$, alors $x = \frac{b}{b+c}$ et $y = \frac{c}{b+c}$ est un vecteur solution et il est unique.
Si $b + c = 0$, b et c étant positifs, on en déduit $b = 0$ et $c = 0$; il découle alors du fait que la matrice est stochastique, que $a = d = 1$. La matrice A est alors la matrice identité, et tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ sont solutions de l'équation $AX = X$.

6. On aura $\sum_q A = \sum_p$ si la somme des termes de n'importe quelle colonne de A est égale à 1. En effet, le terme colonne i de $\sum_p$ est exactement égal à la somme des termes de la colonne i de A.

7. On suppose que A est une matrice q lignes, r colonnes et B est une matrice r lignes, p colonnes.
Les entrées de A et B étant positives, celles de AB le sont aussi. De plus, d'après la question précédente, il nous suffit de montrer que $\sum_q AB = \sum_p$.
Or, toujours d'après la question précédente, $\sum_q AB = (\sum_q A)B = \sum_r B = \sum_p$.
AB est donc stochastique.