Corrigé de l'examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

23 mai 2005

Exercice 1 :

a. On a $\det A = -1$, $\det B = 2$, $\det C = 1$ et $\det D = 2$. Les inverses de ces matrices sont :

$$A^{-1} = A, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b. A, B, C, D sont les matrices de transformations linéaires du plan $\mathbb{R}^2$: la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\mathbb{R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$; l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$; la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$; la similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

c. Un exemple de matrice non nulle et non inversible est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. On a $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6$. On calcule l'inverse par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les opérations utilisées sont les suivantes : échanger les lignes 1 et 3 ; soustraire la ligne 1 des lignes 2 et 3 ; soustraire la ligne 2 de la ligne 3 ; diviser la ligne 2 par 2 et la ligne 3 par 3.

e. Le volume du parallélépipède est $|\det(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}, 3\vec{\imath})| = |\det E| = 6$.

Exercice 2 :

a. $\mathcal{H}$ est le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

b. Une équation de S est $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = r^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2ay + 2az + 3a^2 = r^2$.

c. On a $u \cdot v = 1 - 1 + 0 = 0$ d'où $u \perp v$. Si on pose $w = u \wedge v = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, les vecteurs u, v, w forment une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.

d. Les vecteurs v, w forment une base de $\mathcal{H} = u^\perp$, d'où le système paramétrique suivant pour $\mathcal{H} = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$:

$$\begin{cases} x = \lambda + \mu, \\ y = -\lambda + \mu, \\ z = -2\mu. \end{cases}$$

e. Les vecteurs $u' = \dfrac{1}{\|u\|}u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$, $v' = \dfrac{1}{\|v\|}v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$, $w' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{\jmath} - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

f. Les vecteurs v', w' forment donc une base orthonormée de $\mathcal{H} = u^\perp = u'^\perp$.

g. Les coordonnées du point $u_0 = au = a\sqrt{3}u'$ dans la base u', v', w' sont $a\sqrt{3}, 0, 0$. Une équation de $\mathcal{S}$ dans cette base orthonormée est donc $(x' - a\sqrt{3})^2 + y'^2 + z'^2 = r^2$, c'est-à-dire $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2a\sqrt{3}x' + 3a^2 = r^2$.

h. Une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans la base orthonormée v', w' est donc $y'^2 + z'^2 + 3a^2 = r^2$.

i. On a $\mathcal{C} \neq \emptyset$ si et seulement si $r^2 - 3a^2 \geqslant 0$. Dans ce cas, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{r^2 - 3a^2}$ dans le plan $\mathcal{H}$.

Exercice 3 :

a. On a $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$ et $a_5 = 8$.

b. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrons que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$ par récurrence sur $n \geqslant 2$. C'est le cas pour $n = 2$, et si c'est vrai pour n, alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + a_{n-1} & a_n \\ a_{n-1} + a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$. C.Q.F.D.

c. Le polynôme caractéristique de A est $\Gamma(z) = \det(A - z\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 1 & -z \end{vmatrix} = z^2 - z - 1$.

Les valeurs propres de A sont donc $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

d. Comme α est une racine du polynôme Γ, on a $\alpha^2 = \alpha + 1$.

e. On a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $u = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ est un vecteur propre de A associé à α.

De même, $v = \beta\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ est un vecteur propre de A associé à β.

f. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et son inverse est $P^{-1} = \dfrac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$.

g. On a $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ et $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha\beta^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha\beta^n - \beta\alpha^n \end{pmatrix}$.

h. On a donc $a_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 4 :

a. Les matrices M et P sont symétriques. Les matrices M et N sont orthogonales.

b. On a ${}^t({}^tA\,A) = {}^tA\,{}^{tt}A = {}^tA\,A$, donc ${}^tA\,A$ est une matrice symétrique.

c. Si A et B sont orthogonales, on a ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tA\,A\,B = {}^tB\,B = \mathrm{I}_p$, donc AB est une matrice orthogonale.

d. On a ${}^tXAX' = axx' + bxy' + cyx' + dyy'$.

e. Si ${}^tXAX' = {}^tXX'$ pour tout choix de colonnes X et X', et si on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$a = {}^tUAU = {}^tUU = 1, \quad b = {}^tUAV = {}^tUV = 0, \quad c = {}^tVAU = {}^tVU = 0, \quad d = {}^tVAV = {}^tVV = 1.$$

Donc $A = \mathrm{I}_2$.

Réciproquement, si $A = \mathrm{I}_2$ alors ${}^tXAX' = {}^tX\mathrm{I}_2X' = {}^tXX'$ pour tout choix de colonnes X et X'. C.Q.F.D.

f. D'après la question précédente, on a ${}^tA\,A = \mathrm{I}_2$ si et seulement si ${}^t(AX)AX' = {}^tX\,{}^tA\,A\,X' = {}^tXX'$ pour tout choix de colonnes X et X'. Autrement dit, la matrice A est orthogonale si et seulement si $f(u) \cdot f(u') = u \cdot u'$ pour tout choix de vecteurs u et u' dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

a. Voir la figure 1.

b. On a $e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos\dfrac{3i\pi}{4} + i\sin\dfrac{3i\pi}{4} = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$, donc $2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} = -2 + 2i$.

c. On a $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}\,\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}$. Le point correspondant est l'intersection de la droite passant par 0 et $e^{-\frac{i\pi}{3}}$ avec la droite d'équation $\mathfrak{Im}(z) = -3$.

d. Les racines carrées de -4 sont $\pm 2i$. Ses racines quatrièmes sont les racines carrées de $\pm 2i$, c'est-à-dire $\pm 1 \pm i$.

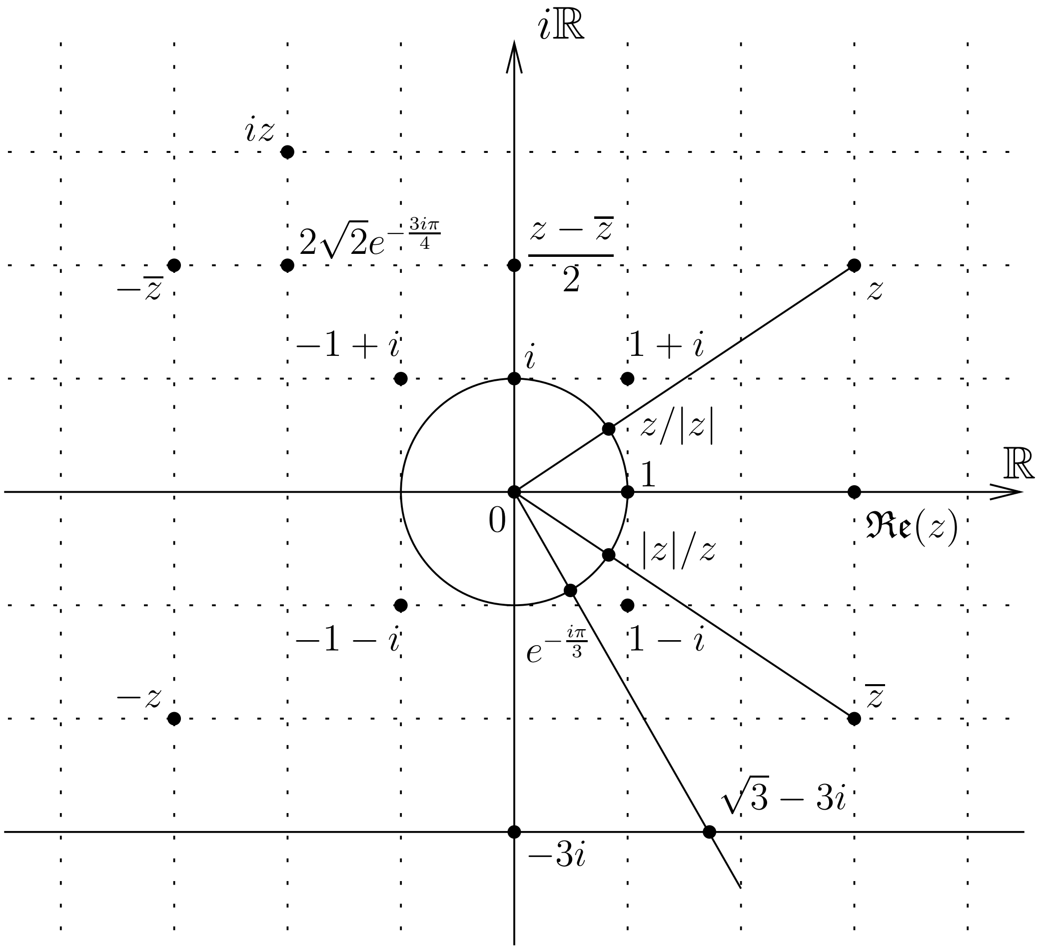

FIG. 1 – dans le plan complexe