Corrigé de l'examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

15 mai 2007

Exercice 1 :

a. Le centre de $\mathcal{S}$ est le milieu du segment $[AB]$, c'est-à-dire $C = (2,3,3)$. Son rayon vaut $AC = 3$.

b. On obtient l'équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z = -13$.

c. On a $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = x(x-4) + (y-1)(y-5) + (z-2)(z-4) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 6z + 13$.

d. On a donc $M \in \mathcal{S}$ lorsque $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$.

e. On a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC}$ car C est le milieu du segment $[AB]$, d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = CM^2 - AC^2$.
Or on a $M \in \mathcal{S}$ lorsque $CM = AC$, c'est-à-dire $CM^2 - AC^2 = 0$. On retrouve bien le critère ci-dessus.

Exercice 2 :

a. Les vecteurs u et v ne peuvent pas être colinéaires, car ils sont associés à des valeurs propres distinctes.

b. La matrice de f dans la base de vecteurs propres u, v est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c. Les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, car $\det(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$.

d. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et son inverse est $P^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

e. La relation de changement de base est $A = PDP^{-1}$, d'où $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

f. Le polynôme caractéristique de A est $\Gamma(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & -\frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

Les racines de Γ sont 2 et -1 : on retrouve bien les valeurs propres de f. De plus, le polynôme caractéristique de A est le même que celui de D. En fait, le polynôme caractéristique ne dépend pas du choix de la base.

Exercice 3 :

a. Si $A^2 = B$, alors $AB = AA^2 = A^3 = A^2A = BA$.

b. Si $A^2 = B$, alors $\det B = \det(A^2) = (\det A)^2 \geqslant 0$.

c. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée car $\det B = -1 < 0$.

d. Si A est la matrice d'une symétrie axiale, alors $A^2 = \mathrm{I}$. Or il y a une infinité de telles symétries axiales.
La matrice $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a donc une infinité de racines carrées.

e. Si $AB = BA$, alors $\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$, d'où $b = -c$ et $d = a$.

f. Une telle matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. Autrement dit, c'est une matrice de similitude.

g. Si $A^2 = B$, alors A commute avec B, donc $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & -2ac \\ 2ac & a^2 - c^2 \end{pmatrix}$. Or $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $a^2 = c^2$ et $ac = \dfrac{1}{2}$. D'après la seconde équation, a et c ont le même signe, d'où $a = c = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La matrice B a donc deux racines carrées : $\pm\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

h. Si $AB = BA$, alors $\begin{pmatrix} b & 5b - 4a \\ d & 5d - 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4c & -4d \\ a + 5c & b + 5d \end{pmatrix}$, d'où $b = -4c$ et $d = a + 5c$.

i. Si $A^2 = B$, alors A commute avec B, donc $A = \begin{pmatrix} a & -4c \\ c & a + 5c \end{pmatrix}$ et le premier coefficient de A^2 vaut $a^2 - 4c^2$.
Or le premier coefficient de B vaut 0. On a donc $a^2 = 4c^2$, d'où $a = \pm 2c$.

j. Si $a = -2c$, alors $A = \begin{pmatrix} -2c & -4c \\ c & 3c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = c^2\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Si $a = 2c$, alors $A = \begin{pmatrix} 2c & -4c \\ c & 7c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, d'où $A^2 = c^2\begin{pmatrix} 0 & -36 \\ 9 & 45 \end{pmatrix} = 9c^2\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

On a donc $A^2 = B$ dans les cas suivants : $a = -2c$ et $c = \pm 1$, ou bien $a = 2c$ et $c = \pm\dfrac{1}{3}$.

La matrice B a donc quatre racines carrées : $\pm\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\pm\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

a. Les formules exprimant ces transformations sont respectivement : $-z$, $\mathfrak{Re}(z)$, $\overline{z}$, iz.

b. Si $u > 0$, la base du triangle $\Delta(u, v)$ vaut u et sa hauteur vaut $|\mathfrak{Im}(v)|$. Son aire vaut donc $\dfrac{u|\mathfrak{Im}(v)|}{2}$.

c. Le nombre $u\overline{u} = |u|^2$ est un réel positif. L'aire du triangle $\Delta(u\overline{u}, v\overline{u})$ vaut donc $\dfrac{|u|^2|\mathfrak{Im}(v\overline{u})|}{2}$.

d. La similitude $z \mapsto z\overline{u}$ est la composée d'une rotation et de l'homothétie de rapport $|\overline{u}| = |u|$. Son facteur de changement d'aire est celui de l'homothétie, c'est-à-dire $|u|^2$.

e. Le triangle $\Delta(u\overline{u}, v\overline{u})$ s'obtient en appliquant la similitude $z \mapsto z\overline{u}$ au triangle $\Delta(u, v)$. D'après les deux questions précédentes, l'aire du triangle $\Delta(u, v)$ vaut donc $\dfrac{|\mathfrak{Im}(v\overline{u})|}{2}$.