Corrigé de l'examen de calcul matriciel (Licence MASHS - MI - SPC, S2)

14 mai 2008

Exercice 1 :

a. On a $w = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = v - u$.

b. On a donc $\|w\|^2 = w \cdot w = (v-u)\cdot(v-u) = v\cdot v - u\cdot v - v\cdot u + u\cdot u = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u\cdot v$.

c. On obtient $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = u\cdot v = \dfrac{\|u\|^2+\|v\|^2-\|w\|^2}{2} = \dfrac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2}$.

d. Le produit scalaire est nul, par exemple, si $OP = 3$, $OQ = 4$, et $PQ = 5$.

Exercice 2 :

a. $P(1) = a+b+c$, $P(2) = 4a+2b+c$, et $P(4) = 16a+4b+c$. On cherche donc a, b, c tels que :

$$\begin{cases} a+b+c = 2, \\ 4a+2b+c = 3, \\ 16a+4b+c = 2. \end{cases}$$

b. La matrice associée à ce système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est inversible car son déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2+12-16 = -6 \neq 0.$$

c. Pour résoudre ce système, on soustrait d'abord la première équation de la deuxième et de la troisième, puis on soustrait trois fois la deuxième équation de la troisième :

$$\begin{cases} a+b+c = 2, \\ 3a+b = 1, \\ 15a+3b = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c = 2, \\ 3a+b = 1, \\ 6a = -3. \end{cases}$$

On obtient $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{5}{2}$, et $c = 0$. [*Autrement dit,* $P(X) = \dfrac{5X - X^2}{2}$.]

d. Dans le cas général, on doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b + c = y_1, \\ x_2^2 a + x_2 b + c = y_2, \\ x_3^2 a + x_3 b + c = y_3. \end{cases}$$

e. Pour les couples $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, il n'existe pas de polynôme d'interpolation, car on ne peut pas avoir à la fois $P(2) = 3$ et $P(2) = 4$.

f. Il existe un unique polynôme d'interpolation si et seulement si le déterminant du système est non nul. Pour $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, on calcule ce déterminant en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = x_3^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - x_3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -x_3^2 + 3x_3 - 2 = -(x_3-1)(x_3-2).$$

La condition est donc : $x_3 \neq 1$ et $x_3 \neq 2$. [*Autrement dit,* $x_3 \neq x_1$ *et* $x_3 \neq x_2$.]

Exercice 3 :

a. On calcule le polynôme caractéristique de f :

$$\det(A-\lambda \mathrm{I}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Les valeurs propres de f sont donc 1 et 2.

b. Les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x+z = x, \\ -x+2y+z = y, \\ 2z = z. \end{cases}$$

Ce sont donc les vecteurs (non nuls) de la droite vectorielle définie par les équations $x = y$ et $z = 0$.

De même, les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x+z = 2x, \\ -x+2y+z = 2y, \\ 2z = 2z. \end{cases}$$

Ce sont donc les vecteurs (non nuls) du plan vectoriel d'équation $x = z$.

c. Pour inverser P, on soustrait la troisième ligne de la première, puis la première de la deuxième :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. [*Il n'est pas nécessaire de calculer le déterminant.*]

d. Les colonnes de P forment une base car P est inversible. D'après (b), le premier vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ est associé à la valeur propre 1, et les deux autres vecteurs $\vec{\jmath}$ et $\vec{\imath} + \vec{k}$ sont associés à la valeur propre 2.

e. La matrice de f dans cette base est donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

f. Cette matrice est diagonale, donc $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

g. On a $B = P^{-1}AP$ et $A = PBP^{-1}$.

h. On a donc $A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n-1 \\ 1-2^n & 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

a. On a $j = e^{2i\pi/3}$, $j^2 = e^{4i\pi/3}$, $j^3 = e^{6i\pi/3} = e^{i0} = 1$, et $-j^2 = e^{i\pi+4i\pi/3} = e^{7i\pi/3} = e^{i\pi/3}$.

b. On a $(1-j)(1+j+j^2) = 1-j^3 = 1-1 = 0$. Comme $1-j \neq 0$, on a donc $1+j+j^2 = 0$.

c. On a $ju + j^2v + w = ju + j^2v + j^3w = j(u + jv + j^2w) = 0$ (car $j^3 = 1$).

On a donc $w - u + j^2(v-u) = -(1+j^2)u + j^2v + w = ju + j^2v + w = 0$ (car $j = -(1+j^2)$).

d. Les complexes $v-u$ et $w-u$ correspondent respectivement aux vecteurs $\overrightarrow{UV}$ et $\overrightarrow{UW}$.

e. L'application $z \mapsto -j^2z = e^{i\pi/3}z$ correspond à la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'origine.

f. Comme $w-u = -j^2(v-u)$, le vecteur $\overrightarrow{UW}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{UV}$ par la rotation d'angle $\pi/3$. Autrement dit, le triangle UVW est équilatéral (dans le sens direct).