

# Calcul matriciel

Yves Lafont

Faculté des Sciences de Luminy - Licences MASHS-MI-SPC - Année 1 - Semestre 2

Année universitaire 2007/2008



Yves Lafont est enseignant-chercheur à la *Faculté des Sciences de Luminy*. Il effectue sa recherche à l'*Institut de Mathématiques de Luminy* dans les domaines de l'algèbre, la logique et l'informatique théorique.

Site personnel : <http://iml.univ-mrs.fr/~lafont>

Site du cours : <http://iml.univ-mrs.fr/~lafont/licence/cm.html>

# 1 Calcul vectoriel

## 1.1 Scalaires et vecteurs

Dans ce cours, un *scalaire* est un réel  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et un *vecteur* est un  $p$ -uplet  $u = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ .

**Notation :** On utilise le symbole  $0$  pour le vecteur nul  $(0, \dots, 0)$ . Autre notation en usage :  $\vec{0}$ .

Les opérations sur les scalaires sont la *somme*  $\lambda + \mu$  et le *produit*  $\lambda\mu$ , qui vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) + \nu &= \lambda + (\mu + \nu), & \lambda + 0 &= \lambda, & \lambda + \mu &= \mu + \lambda, \\ (\lambda\mu)\nu &= \lambda(\mu\nu), & 1\lambda &= \lambda, & \lambda\mu &= \mu\lambda, & (\lambda + \mu)\nu &= \lambda\nu + \mu\nu, & 0\lambda &= 0. \end{aligned}$$

De plus, tout scalaire  $\lambda$  a un *opposé*  $-\lambda$  tel que  $\lambda + (-\lambda) = 0$ . On écrit  $\lambda - \mu$  pour  $\lambda + (-\mu)$ .

Enfin, tout scalaire non nul  $\lambda$  a un *inverse*  $\lambda^{-1}$  tel que  $\lambda\lambda^{-1} = 1$ . On écrit  $\lambda/\mu$  pour  $\lambda\mu^{-1}$ .

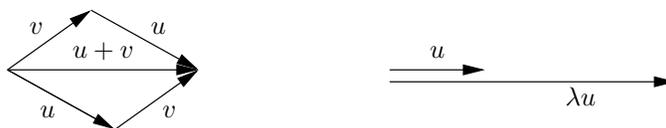
Les opérations sur les vecteurs sont la *somme*  $u + v$  et le *produit externe*  $\lambda u$ , qui vérifient les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= u + (v + w), & u + 0 &= u, & u + v &= v + u, \\ (\lambda\mu)u &= \lambda(\mu u), & 1u &= u, & (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u, & 0u &= 0, & \lambda(u + v) &= \lambda u + \lambda v, & \lambda 0 &= 0. \end{aligned}$$

On écrit  $-u$  pour  $(-1)u$  et  $u - v$  pour  $u + (-v)$ , de sorte que  $u - u = 0$ .

**Exercice 1 :** En utilisant ces propriétés, montrer que si  $\lambda u = 0$ , alors  $\lambda = 0$  ou  $u = 0$ .

Interprétation géométrique de la somme et du produit externe : *composition des vecteurs et changement d'échelle*.



**Remarque :** Tout vecteur  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  est de la forme  $u = x\vec{i} + y\vec{j}$  où les vecteurs  $\vec{i} = (1, 0)$  et  $\vec{j} = (0, 1)$  forment la *base canonique de  $\mathbb{R}^2$* , et les scalaires  $x, y$  sont les deux *composantes de  $u$*  dans cette base. De même, tout vecteur  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est de la forme  $u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  où  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  forment la *base canonique de  $\mathbb{R}^3$* , et  $x, y, z$  sont les trois *composantes de  $u$*  dans cette base.

## 1.2 Produit scalaire

Une *forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^p$*  est une application  $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les identités suivantes :

$$\varphi(u + u', v) = \varphi(u, v) + \varphi(u', v), \quad \varphi(\lambda u, v) = \lambda\varphi(u, v), \quad \varphi(v, u) = \varphi(u, v).$$

**Remarque :** On en déduit que  $\varphi(0, u) = 0$ . Il suffit pour cela d'appliquer la deuxième identité avec  $\lambda = 0$ .

**Exercice 2 :** Montrer qu'il existe une seule forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$\varphi(\vec{i}, \vec{i}) = \varphi(\vec{j}, \vec{j}) = 1, \quad \varphi(\vec{i}, \vec{j}) = 0.$$

[Utiliser la décomposition des vecteurs dans la base canonique.]

**Définition :** Ce  $\varphi$  est le *produit scalaire* défini par  $u \cdot u' = xx' + yy'$  pour  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$ .

Autres notations en usage pour le produit scalaire :  $\langle u, u' \rangle$  et  $\langle u | u' \rangle$ .

**Remarque :** Le produit scalaire est défini de telle sorte que la base canonique  $\vec{i}, \vec{j}$  soit *orthonormée*. On vérifie aisément que cette forme bilinéaire symétrique est *définie positive*. Autrement dit, on a les propriétés suivantes :

$$u \cdot u \geq 0, \quad u \cdot u = 0 \text{ si et seulement si } u = 0.$$

On définit de même le produit scalaire comme une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $\mathbb{R}^p$ .

**Définition :** La *norme euclidienne* du vecteur  $u$  est le réel  $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ , de sorte que  $\|u\|^2 = u \cdot u$ .

**Exercice 3 :** Montrer qu'on peut définir le produit scalaire à partir de la norme euclidienne. [Développer  $\|u + v\|^2$ .]

**Définition :** On dit que les vecteurs  $u$  et  $v$  sont *orthogonaux* et on écrit  $u \perp v$  si on a  $u \cdot v = 0$ .

**Exercice 4 :** Montrer que  $u \perp v$  si et seulement si  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  (*théorème de Pythagore*).

**Exercice 5 :** Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :  $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$ . [Étudier la fonction  $f(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$ .]

**Exercice 6 :** Montrer les propriétés de la norme euclidienne :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \quad \|u\| = 0 \text{ si et seulement si } u = 0.$$

### 1.3 Déterminant dans $\mathbb{R}^2$ et produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Une application  $\delta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est dite *bilinéaire alternée* si elle vérifie les identités suivantes :

$$\delta(u + u', v) = \delta(u, v) + \delta(u', v), \quad \delta(\lambda u, v) = \lambda \delta(u, v), \quad \delta(v, u) = -\delta(u, v).$$

**Exercice 7 :** En déduire les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(u, v + v') &= \delta(u, v) + \delta(u, v'), & \delta(u, \lambda v) &= \lambda \delta(u, v), & \delta(0, u) &= 0 = \delta(u, 0), \\ \delta(u, u) &= 0, & \delta(u + \lambda v, v) &= \delta(u, v) = \delta(u, \lambda u + v). \end{aligned}$$

Une application bilinéaire alternée  $\delta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle une *forme bilinéaire alternée sur  $\mathbb{R}^p$* .

**Exercice 8 :** Montrer qu'il existe une seule forme bilinéaire alternée  $\delta$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\delta(\vec{i}, \vec{j}) = 1$ .

**Définition :** Ce  $\delta$  est le *déterminant* défini par  $\det(u, u') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$  pour  $u = (x, y)$  et  $u' = (x', y')$ .

Interprétation géométrique : la valeur absolue du déterminant est l'aire du parallélogramme défini par  $u, u'$ , et son signe est donné par l'*orientation trigonométrique du plan*. C'est l'*aire algébrique* du parallélogramme.



**Exercice 9 :** Montrer l'identité  $(u \cdot v)^2 + \det(u, v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ , et en déduire l'inégalité  $|\det(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$ . Quelle est l'interprétation géométrique de cette inégalité ?

**Exercice 10 :** Montrer qu'il existe une seule application bilinéaire alternée  $\delta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que :

$$\delta(\vec{i}, \vec{j}) = \vec{k}, \quad \delta(\vec{j}, \vec{k}) = \vec{i}, \quad \delta(\vec{k}, \vec{i}) = \vec{j}.$$

**Définition :** Ce  $\delta$  est le *produit vectoriel* défini par  $u \wedge u' = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$  pour  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$ .

Interprétation géométrique :  $u \wedge u'$  est orthogonal à  $u$  et  $u'$ , sa norme est l'aire du parallélogramme défini par  $u, u'$ , et son sens est donnée par la *règle des trois doigts de la main droite*. C'est l'*aire vectorielle* du parallélogramme.

**Exercice 11 :** Montrer que le produit vectoriel n'est ni commutatif, ni associatif : il existe  $u, v$  tels que  $u \wedge v \neq v \wedge u$ , et de même, il existe  $u, v, w$  tels que  $(u \wedge v) \wedge w \neq u \wedge (v \wedge w)$ . [Utiliser des vecteurs de la base canonique.]

**Exercice 12 :** Montrer l'identité  $(u \cdot v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$ , et en déduire l'inégalité  $\|u \wedge v\| \leq \|u\| \|v\|$ . Quelle est l'interprétation géométrique de cette inégalité ?

### 1.4 Déterminant dans $\mathbb{R}^3$

Une *forme trilinéaire alternée sur  $\mathbb{R}^p$*  est une application  $\delta : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \delta(u + u', v, w) &= \delta(u, v, w) + \delta(u', v, w), & \delta(\lambda u, v, w) &= \lambda \delta(u, v, w), \\ \delta(v, u, w) &= -\delta(u, v, w) = \delta(u, w, v). \end{aligned}$$

**Exercice 13 :** En déduire une identité pour chaque permutation des vecteurs  $u, v, w$  dans  $\delta(u, v, w)$ . [Il y a 6 cas.]

**Exercice 14 :** Montrer qu'il existe une seule forme trilinéaire alternée  $\delta$  sur  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\delta(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = 1$ .

**Définition :** Cette unique application est le *déterminant*, ou *produit mixte*, défini par  $\det(u, u', u'') = u \cdot (u' \wedge u'')$ . Pour  $u = (x, y, z), u' = (x', y', z'), u'' = (x'', y'', z'')$ , on a le *développement par rapport à la première colonne* :

$$\det(u, u', u'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Interprétation géométrique : la valeur absolue du déterminant est le volume du parallélépipède défini par  $u, u', u''$ , et son signe est donné par la *règle des trois doigts de la main droite*. C'est le *volume algébrique* du parallélépipède.

**Exercice 15 :** Établir une formule de développement par rapport à chaque colonne et à chaque ligne. [Il y a 6 cas.]

**Exercice 16 :** Calculer tous les déterminants de vecteurs de la base canonique. [Il y a 27 cas.]

**Exercice 17 :** Montrer l'inégalité  $|\det(u, v, w)| \leq \|u\| \|v\| \|w\|$ . Quelle est son interprétation géométrique ?

## 1.5 Droites vectorielles et colinéarité

**Notation :** Si  $u \in \mathbb{R}^p$ , on pose  $\mathbb{R}u = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^p$ .

**Définition :** Si  $u$  est un vecteur non nul, on dit que  $\mathcal{D} = \mathbb{R}u$  est la *droite vectorielle engendrée par le vecteur  $u$* .

Interprétation géométrique :  $\mathcal{D}$  est la droite de *vecteur directeur*  $u$  qui passe par l'origine  $O$ .



**Remarque :** En fait, tout vecteur non nul de  $\mathcal{D}$  est directeur. Autrement dit, si  $u' \in \mathcal{D}$  et  $u' \neq 0$ , alors  $\mathbb{R}u' = \mathcal{D}$ . Un tel vecteur directeur définit un *système paramétrique* pour la droite vectorielle qu'il engendre.

**Exemple :** Si  $u = \vec{i} + 2\vec{j}$ , la droite  $\mathcal{D}$  est définie par le système paramétrique 
$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2\lambda. \end{cases}$$

**Exercice 18 :** Écrire un autre système paramétrique pour cette droite, et donner la forme générale d'un tel système. Interprétation cinématique :  $\mathcal{D}$  est la trajectoire d'un point qui se déplace à vitesse constante  $u$  et qui passe par l'origine  $O$  à l'instant 0. Cette trajectoire est inchangée si on multiplie la vitesse  $u$  par une constante non nulle. Pour représenter le *temps*, on utilise souvent  $t$  à la place de  $\lambda$  comme *variable paramétrique*.

**Exercice 19 :** Écrire un système paramétrique pour la droite  $\mathbb{R}u$  où  $u = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

**Définition :** On dit que deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^p$  sont *colinéaires* s'ils appartiennent à une même droite vectorielle.

**Remarque :** Si  $u = 0$ , alors  $u, v$  sont forcément colinéaires. Si  $u \neq 0$ , cela revient à dire que  $v \in \mathbb{R}u$ .

**Exercice 20 :** Montrer le *critère de colinéarité pour  $\mathbb{R}^2$*  :  $u, v \in \mathbb{R}^2$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(u, v) = 0$ . [Pour la réciproque : commencer par le cas  $u = 0$  puis celui où la première composante de  $u$  est non nulle.]

**Remarque :** Ce critère donne une *équation cartésienne* de la droite  $\mathbb{R}u$ .

**Exemple :** Si  $u = \vec{i} + 2\vec{j}$ , la droite  $\mathbb{R}u$  est définie par l'équation cartésienne  $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{vmatrix} = 0$ , c'est-à-dire  $y - 2x = 0$ .

**Exercice 21 :** Écrire une autre équation cartésienne de cette droite, et donner la forme générale d'une telle équation.

**Exercice 22 :** Montrer le *critère de colinéarité pour  $\mathbb{R}^3$*  :  $u, v \in \mathbb{R}^3$  sont colinéaires si et seulement si  $u \wedge v = 0$ .

**Remarque :** Si  $u \neq 0$ , ce critère donne 3 équations cartésiennes pour la droite  $\mathbb{R}u$ , mais on peut toujours supprimer l'une d'elles, qui est conséquence des 2 autres : on obtient un *système cartésien à 2 équations* pour la droite  $\mathbb{R}u$ . En fait, si aucune composante de  $u$  n'est nulle, on peut supprimer n'importe laquelle des 3 équations.

**Exercice 23 :** Écrire un système cartésien à 2 équations pour la droite  $\mathbb{R}u$  où  $u = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ .

## 1.6 Plans vectoriels et coplanarité

**Notation :** Si  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$ , on pose  $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{u + v \mid u \in \mathcal{U} \text{ et } v \in \mathcal{V}\} \subset \mathbb{R}^p$ .

**Définition :** Si  $u, v$  sont deux vecteurs *non colinéaires* de  $\mathbb{R}^p$ , on dit que  $\mathcal{P} = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$  est le *plan vectoriel engendré par les vecteurs  $u$  et  $v$*  et que  $u, v$  forment *base du plan vectoriel  $\mathcal{P}$* .

Interprétation géométrique :  $\mathcal{P}$  est le plan parallèle à  $u$  et  $v$  qui passe par l'origine  $O$ .

**Remarque :** On verra plus tard que deux vecteurs non colinéaires de  $\mathcal{P}$  forment nécessairement une base de  $\mathcal{P}$ . Une telle base définit un *système paramétrique* pour le plan qu'elle engendre.

**Exemple :** Si  $u = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  et  $v = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ , le plan  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  est défini par le système paramétrique suivant :

$$\begin{cases} x = \lambda + 4\mu, \\ y = 2\lambda + 5\mu, \\ z = 3\lambda. \end{cases}$$

**Définition :** On dit que trois vecteurs  $u, v, w \in \mathbb{R}^p$  sont *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.

**Remarque :** Si  $u, v$  sont colinéaires, alors  $u, v, w$  sont forcément coplanaires. Si  $u, v$  ne sont pas colinéaires, cela revient à dire que  $w \in \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  (d'après la remarque ci-dessus).

**Exercice 24 :** Montrer le *critère de coplanarité* :  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  sont coplanaires si et seulement si  $\det(u, v, w) = 0$ . [Pour la réciproque : commencer par le cas  $u \wedge v = 0$  puis celui où la première composante de  $u \wedge v$  est non nulle. Dans le deuxième cas, développer le déterminant par rapport à la première ligne.]

**Remarque :** Si  $u, v$  ne sont pas colinéaires, ce critère donne une *équation cartésienne* du plan  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ .

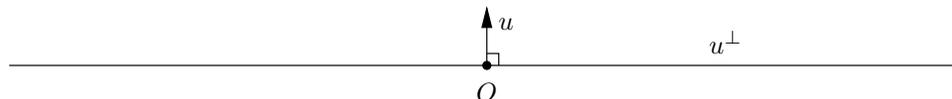
**Exemple :** Si  $u = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  et  $v = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ , le plan  $\mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  est défini par l'équation cartésienne  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$ , c'est-à-dire  $-15x + 12y - 3z = 0$ , ou encore  $5x - 4y + z = 0$ .

### 1.7 Orthogonal et biorthogonal

**Définition :** Si  $u$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , son *orthogonal* est l'ensemble  $u^\perp = \{v \in \mathbb{R}^p \mid u \perp v\} \subset \mathbb{R}^p$ .

**Remarque :**  $0^\perp = \mathbb{R}^p$  car tout vecteur de  $\mathbb{R}^p$  est orthogonal au vecteur nul.

**Exercice 25 :** Montrer que si  $u$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $u^\perp$  est une droite vectorielle.



**Exemple :**  $(\vec{i} + 2\vec{j})^\perp$  est la droite vectorielle d'équation cartésienne  $x + 2y = 0$  et de vecteur directeur  $2\vec{i} - \vec{j}$ .

**Exercice 26 :** Montrer que si  $u$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $u^\perp$  est un plan vectoriel.

**Exemple :**  $(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})^\perp$  est le plan vectoriel d'équation cartésienne  $x + 2y + 3z = 0$  et de base  $2\vec{i} - \vec{j}, 3\vec{i} - \vec{k}$ .

**Définition :** Si  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ , son *orthogonal* est l'ensemble  $\mathcal{U}^\perp = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} u^\perp = \{v \in \mathbb{R}^p \mid u \perp v \text{ pour tout } u \in \mathcal{U}\}$ .

**Exercice 27 :** Quel est l'ensemble  $(\mathbb{R}^p)^\perp$  ?

**Exercice 28 :** Montrer que si  $u, v$  sont deux vecteurs non colinéaires de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\{u, v\}^\perp$  est une droite vectorielle.

**Remarque :** Dans ce cas,  $u \wedge v$  est un vecteur directeur de  $\{u, v\}^\perp$ .

**Exemple :**  $\{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, 4\vec{i} + 5\vec{j}\}^\perp$  est la droite vectorielle définie par le système cartésien  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 4x + 5y = 0. \end{cases}$   
Un vecteur directeur de cette droite est  $5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ .

**Exercice 29 :** Montrer que  $(\mathbb{R}u)^\perp = u^\perp$  et que  $(\mathbb{R}u + \mathbb{R}v)^\perp = \{u, v\}^\perp$ .

**Remarque :** En particulier, cela signifie que l'orthogonal d'une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  est une droite vectorielle. De même, l'orthogonal d'une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  est un plan vectoriel, et vice-versa.

**Définition :** Le *biorthogonal* d'un vecteur  $u$  est  $u^{\perp\perp} = (u^\perp)^\perp$ . On définit de même le biorthogonal de  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$ .

**Exercice 30 :** Montrer que  $u \in u^{\perp\perp}$ , et plus généralement,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^{\perp\perp}$ .

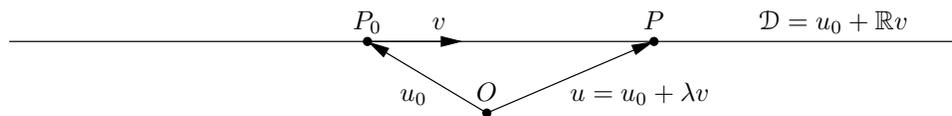
**Exercice 31 :** Montrer que  $u^{\perp\perp} = \mathbb{R}u$  si  $u$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ . [Distinguer les cas  $u = 0$  et  $u \neq 0$ .]

**Exercice 32 :** Montrer que  $\{u, v\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$  si  $u, v$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 33 :** Montrer que  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\perp\perp}$  si  $\mathcal{U}$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ , ou un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.8 Droites et plans affines

**Définition :** Si  $u_0, v$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  et  $v$  est non nul, on dit que  $\mathcal{D} = u_0 + \mathbb{R}v = \{u_0 + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  est la *droite affine passant par  $u_0$  et parallèle à  $v$* . On dit aussi que la droite vectorielle  $\mathbb{R}v$  est la *direction* de  $\mathcal{D}$ .



**Remarque :**  $\mathcal{C}$  est une droite au sens habituel, mais ici, on identifie le vecteur  $u$  avec le point  $P$  tel que  $u = \overrightarrow{OP}$ , dont les *coordonnées* sont d'ailleurs les *composantes* de  $u$ . On peut remplacer  $u_0$  par n'importe quel vecteur de  $\mathcal{D}$ , et  $v$  par n'importe quel vecteur non nul de  $\mathbb{R}v$ . De tels vecteurs définissent un *système paramétrique* pour  $\mathcal{D}$ .

**Exemple :** Si  $u_0 = (1, 2)$  et  $v = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ , la droite  $\mathcal{D}$  est définie par le système paramétrique  $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda, \\ y = 2 + 4\lambda. \end{cases}$

**Remarque :** On obtient un système cartésien pour  $\mathcal{D}$  à partir d'un système cartésien pour la direction  $\mathbb{R}v$  en remplaçant le membre droit de chaque équation (qui est nul) par la valeur du membre gauche en  $u_0$ .

**Exemple :** Pour la droite  $\mathcal{D}$  ci-dessus, l'équation cartésienne de  $\mathbb{R}v$  est  $4x - 3y = 0$  et celle de  $\mathcal{D}$  est  $4x - 3y = -2$ .

**Remarque :** La droite  $\mathcal{D} = u_0 + \mathbb{R}v$  est aussi la droite passant par  $u_0$  et  $u_1 = u_0 + v$ .

**Exercice 34 :** Établir un *critère d'alignement* pour trois points de  $\mathbb{R}^2$  (respectivement de  $\mathbb{R}^3$ ).

**Exercice 35 :** Écrire un système paramétrique et une équation cartésienne pour la droite passant par  $(1, 2)$  et  $(4, 7)$ .

**Exercice 36 :** Montrer que la droite passant par  $u$  et  $v$  est l'ensemble  $\mathcal{D} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$ .

**Définition :** Si  $u_0, v, w$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  et  $v, w$  ne sont pas colinéaires, on dit que  $\mathcal{P} = u_0 + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$  est le *plan affine passant par  $u_0$  et parallèle à  $v, w$* . On dit aussi que le plan vectoriel  $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$  est la *direction* de  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 37 :** Écrire un système paramétrique et une équation cartésienne pour le plan passant par les points  $(1, 2, 3), (4, 5, 7), (1, 1, 1)$ .

## 2 Applications linéaires et matrices

### 2.1 Applications linéaires

**Définition :** Une application  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est dite *additive* si on a  $f(u + v) = f(u) + f(v)$  pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^p$ .

**Exercice 38 :** Montrer que si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est additive, alors on a  $f(0) = 0$  et  $f(-u) = -f(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^p$ . En déduire qu'on a  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{Q}$ . [Commencer par le cas  $\lambda \in \mathbb{N}$ .]

**Définition :** Une application  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est dite *linéaire* si elle satisfait les deux identités suivantes :

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \text{ pour tout } u, v \in \mathbb{R}^p, \quad f(\lambda u) = \lambda f(u) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } u \in \mathbb{R}^p.$$

**Exercice 39 :** Montrer que l'application nulle  $0 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  définie par  $0(u) = 0$  est linéaire, de même que l'identité  $\text{id} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  définie par  $\text{id}(u) = u$  et les *composantes*  $\xi_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définies par  $\xi_i(x_1, \dots, x_p) = x_i$ .

**Exercice 40 :** Montrer que si  $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  sont linéaires, alors  $f + g$  est linéaire, ainsi que  $\lambda f$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 41 :** Montrer que si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$  sont linéaires, alors  $g \circ f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$  est linéaire.

**Exercice 42 :** Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = ax$  est linéaire, et que toute application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de cette forme.

**Remarque :** L'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = ax + b$  est dite *affine*. Pour  $b \neq 0$ , elle n'est pas linéaire. Attention : les *fonctions linéaires* des physiciens, par exemple, sont en fait des applications affines.

**Exercice 43 :** Montrer que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x) = (ax, bx)$  est linéaire, et que toute application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de cette forme.

**Exercice 44 :** Montrer que pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = ax + by$  est linéaire, et que toute application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de cette forme. [Utiliser la base canonique  $\vec{i}, \vec{j}$ .]

**Définition :** L'*image* d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est l'ensemble  $\text{im } f = f(\mathbb{R}^p) = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^p\}$ , et son *noyau* est l'ensemble  $\ker f = f^{-1}\{0\} = \{u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0\}$ .

**Exercice 45 :** Montrer que toute droite vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  est l'image d'une application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et le noyau d'une application linéaire  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exercice 46 :** Montrer qu'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est injective si et seulement si on a  $\ker f = \{0\}$ .

### 2.2 Matrices carrées d'ordre 2

**Définition :** Une *matrice carrée d'ordre 2* est un tableau de la forme  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

On montre comme ci-dessus que l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  est linéaire, et que toute application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de cette forme.

**Définition :** On dit que  $f$  est l'*application linéaire de matrice*  $A$ , ou que  $A$  est la *matrice de*  $f$ .

**Remarque :** D'une part, les colonnes de la matrice  $A$  correspondent aux vecteurs  $f(\vec{i}) = (a, c)$  et  $f(\vec{j}) = (b, d)$ . D'autre part, si on pose  $(x', y') = f(x, y)$ , alors  $x'$  et  $y'$  s'expriment au moyen du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases}$$

On représente ce calcul par un *diagramme* (figure 1). Les sommets du haut et du bas correspondent respectivement aux *entrées*  $x, y$  et aux *sorties*  $x', y'$ . L'arête entre  $x$  et  $x'$ , par exemple, indique le *coefficient* de l'entrée  $x$  dans la sortie  $x'$ . On omet le coefficient lorsqu'il vaut 1, et l'arête lorsque son coefficient vaut 0 (figure 2).

**Exercice 47 :** Dans chacun des cas suivants, donner la matrice de l'application linéaire  $f$  ainsi que son diagramme, puis dessiner les vecteurs  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$  :

- *symétrie de centre*  $O : f(x, y) = (-x, -y)$  ;
- *homothétie de rapport*  $\rho$  *et de centre*  $O : f(x, y) = (\rho x, \rho y)$  ;
- *symétrie orthogonale d'axe*  $O\vec{i} : f(x, y) = (x, -y)$  ;
- *projection orthogonale sur l'axe*  $O\vec{i} : f(x, y) = (x, 0)$  ;
- *affinité orthogonale de rapport*  $\rho$  *et d'axe*  $O\vec{i} : f(x, y) = (x, \rho y)$  ;
- *rotation d'angle*  $\theta$  *et de centre*  $O : f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  ;
- *similitude de rapport*  $\rho$ , *d'angle*  $\theta$ , *et de centre*  $O : f(x, y) = (\rho x \cos \theta - \rho y \sin \theta, \rho x \sin \theta + \rho y \cos \theta)$ .

**Remarque :** Pour  $u \neq 0$ , la *translation de vecteur*  $u$  n'est pas linéaire. Il en va de même pour toute transformation du plan qui ne préserve pas l'origine  $O$  : par exemple, la symétrie de centre  $O' \neq O$ .

### 2.3 Opérations sur les matrices carrées d'ordre 2

**Notation :** On pose  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 48 :** Quelles sont les applications linéaires associées à ces matrices ?

**Définition :** La *somme*  $A+B$  de deux matrices carrées d'ordre 2 est la matrice de  $f+g$  où  $f, g$  sont les applications linéaires de matrices respectives  $A$  et  $B$ . De même, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le *produit*  $\lambda A$  est la matrice de  $\lambda f$ .

**Exercice 49 :** Comment calcule-t-on la somme  $A+B$  et le produit  $\lambda A$  ?

**Remarque :** Ces opérations sont formellement les mêmes que celles définies sur les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ . En particulier, elles vérifient les identités suivantes :

$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad A+\mathbf{0} = A, \quad A+B = B+A,$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \quad 1A = A, \quad (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \quad 0A = \mathbf{0}, \quad \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \quad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

On écrit  $-A$  pour  $(-1)A$  et  $A-B$  pour  $A+(-B)$ , de sorte que  $A-A = \mathbf{0}$ .

**Exercice 50 :** Exprimer  $x''$  et  $y''$  en fonction de  $x$  et  $y$  sachant que :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad \begin{cases} x'' = a'x' + b'y', \\ y'' = c'x' + d'y'. \end{cases}$$

En déduire la matrice de  $f' \circ f$  où  $f, f'$  sont les applications linéaires de matrices  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ .

**Définition :** La matrice ci-dessus est le *produit*  $A'A$ .

**Remarque :** Pour calculer  $A'A$ , il suffit de placer  $A$  en haut à droite de  $A'$ , et de faire le produit *ligne par colonne* :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

**Exercice 51 :** Comment obtient-on le diagramme de  $A'A$  à partir des diagrammes de  $A$  et de  $A'$  (figure 3) ?

**Exercice 52 :** Calculer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

**Exercice 53 :** Soient  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer les produits  $PP, PN, NP$ , et  $NN$ .

**Exercice 54 :** Calculer  $AI$  et  $IA$ , puis  $A\mathbf{0}$  et  $\mathbf{0}A$ . Si  $AB = \mathbf{0}$ , peut-on en déduire que  $A = \mathbf{0}$  ou  $B = \mathbf{0}$  ?

**Exercice 55 :** Montrer que le produit des matrices n'est pas *commutatif* : on n'a pas nécessairement  $AB = BA$ .

**Définition :** Si  $AB = BA$ , on dit que  $A$  *commute avec*  $B$ , ou que  $A$  et  $B$  *commutent*.

**Exercice 56 :** Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les autres ? [Utiliser les matrices  $P$  et  $N$ .]

**Exercice 57 :** Montrer que le produit des matrices est *associatif* :  $(AB)C = A(BC)$ .

**Remarque :** On omet les parenthèses inutiles. Par exemple, on écrit  $A+B+C$  pour la somme  $A+(B+C)$ ,  $ABC$  pour le produit  $A(BC)$ , et  $AB+CD$  pour la somme  $(AB)+(CD)$ .

**Notation :** On définit  $A^n$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  en posant  $A^0 = \mathbf{I}$  et  $A^{n+1} = A^n A$ . Autrement dit :

$$A^0 = \mathbf{I}, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad \dots, \quad A^n = A \cdots A \text{ (} n \text{ fois)}.$$

**Exercice 58 :** Exprimer  $A^{m+n}$  et  $A^{mn}$  en fonction de  $A^m$  et/ou de  $A^n$ . Montrer que  $A^m$  commute avec  $A^n$ .

**Exercice 59 :** Montrer que le produit des matrices est *bilinéaire* :

$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC, \quad (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B).$$

**Exercice 60 :** À quelle condition sur  $A$  et  $B$  a-t-on les identités remarquables suivantes :

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB? \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2?$$

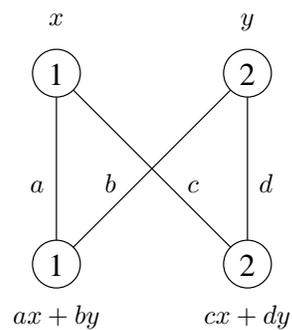


FIG. 1 – Diagramme associé à la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

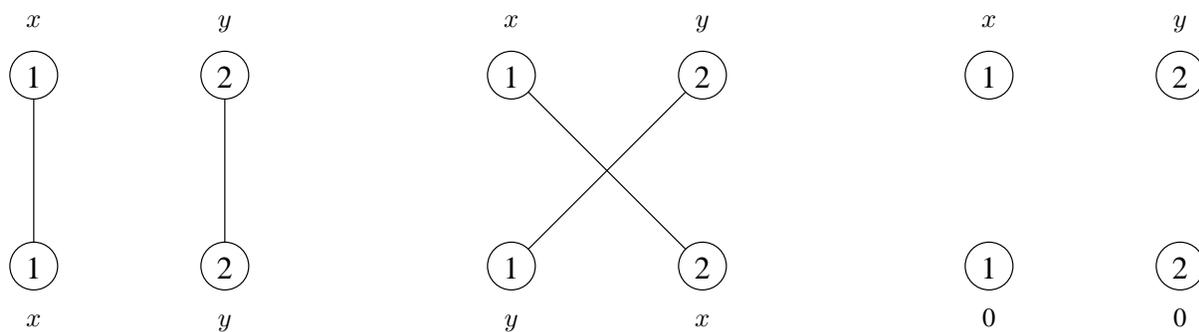


FIG. 2 – Diagrammes associés aux matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

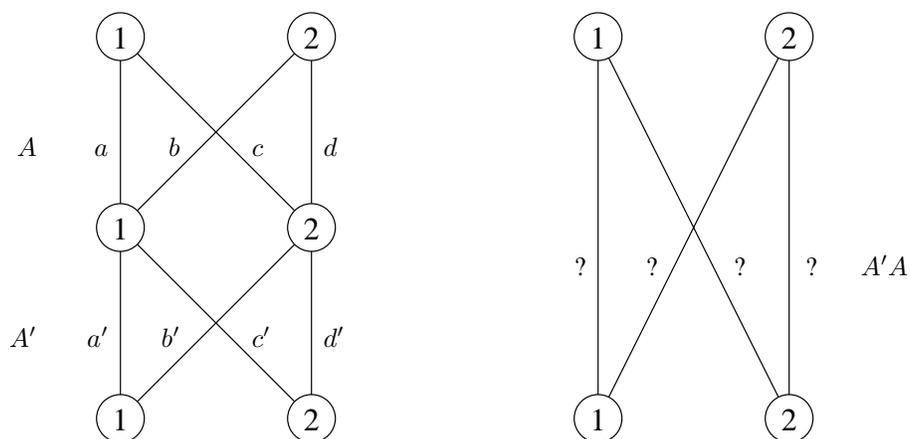


FIG. 3 – Diagramme associé au produit  $A'A$

## 2.4 Matrices à $q$ lignes et $p$ colonnes

**Définition :** Une *matrice* à  $q$  lignes et  $p$  colonnes ( $p, q \geq 1$ ) est un tableau de la forme  $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix}$ .

En particulier, une *matrice carrée d'ordre  $p$*  est une matrice à  $p$  lignes et  $p$  colonnes.

**Remarque :** Les indices  $i$  et  $j$  sont respectivement le numéro de ligne et le numéro de colonne du *coefficient*  $a_{i,j}$ . Dans le cas particulier où  $p = q = 1$ , on identifie la matrice  $A$  avec son unique coefficient  $a_{1,1}$ .

L'application  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  définie par  $f(x_1, \dots, x_p) = (a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p, \dots, a_{q,1}x_1 + \cdots + a_{q,p}x_p)$  est linéaire, et on montre aisément que toute application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  est de cette forme.

**Définition :** On dit que  $f$  est l'*application linéaire de matrice  $A$* , ou que  $A$  est la *matrice de  $f$* .

**Définition :** Si  $u = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ , alors sa *matrice colonne* est  $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$  et sa *matrice ligne* est  $(a_1 \ \cdots \ a_p)$ .

**Exercice 61 :** Montrer que la première est en fait la matrice de l'application linéaire  $u_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  définie par  $u_*(x) = xu$ , et que la seconde est celle de l'application linéaire  $u^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $u^*(v) = u \cdot v$ .

**Remarque :** Toute application linéaire  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  est donc de la forme  $u_*$ . Souvent, on identifie  $u_*$  avec le vecteur  $u = u_*(1)$  : on parle alors de la *matrice de  $u$*  plutôt que de la *matrice colonne de  $u$* . De même, toute application linéaire  $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est de la forme  $u^*$ . Une telle application s'appelle aussi une *forme linéaire sur  $\mathbb{R}^p$* .

On a vu que la matrice d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  s'obtient en juxtaposant les deux matrices colonnes des vecteurs  $f(\vec{i})$  et  $f(\vec{j})$ . Il existe une règle analogue pour la matrice d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ .

**Exercice 62 :** Pour chacune des applications linéaires suivantes  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , écrire les matrices colonnes des vecteurs  $f(\vec{i})$ ,  $f(\vec{j})$ ,  $f(\vec{k})$ , en déduire la matrice de  $f$  et le système linéaire correspondant : *symétrie de centre  $O$*  ; *homothétie de rapport  $\rho$  et de centre  $O$*  ; *symétrie orthogonale par rapport au plan  $O\vec{i}\vec{j}$*  ; *projection orthogonale sur le plan  $O\vec{i}\vec{j}$*  ; *affinité orthogonale de rapport  $\rho$  par rapport au plan  $O\vec{i}\vec{j}$*  ; *symétrie orthogonale d'axe  $O\vec{k}$*  ; *projection orthogonale sur l'axe  $O\vec{k}$*  ; *rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $O\vec{k}$*  (respectivement d'axe  $O\vec{i}$  ou d'axe  $O\vec{j}$ ).

**Remarque :** Pour les rotations, il faut tenir compte de l'*orientation de l'axe* (règle du tournevis).

**Notation :** On note  $\mathbf{0}_{q,p}$  la matrice de l'*application nulle*  $0 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  définie par  $0(u) = 0$  et  $I_p$  la matrice de l'*identité*  $\text{id} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  définie par  $\text{id}(u) = u$ . Par exemple, on a :

$$\mathbf{0}_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas où il n'y a pas d'ambiguïté sur le nombre de lignes ou de colonnes, on écrit  $\mathbf{0}$  pour  $\mathbf{0}_{p,q}$  et  $I$  pour  $I_p$ .

Les opérations introduites dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 s'étendent de façon évidente aux matrices de type quelconque, mais elles ne sont pas définies dans tous les cas.

**Exercice 63 :** Pour quels types de matrices la somme  $A + B$  est-elle définie ? Même question pour le produit  $AB$ .

Les propriétés de ces opérations sont essentiellement les mêmes que celles établies dans le cas des matrices carrées d'ordre 2. En particulier, on a :

$$A + \mathbf{0}_{q,p} = A, \quad A I_p = A, \quad I_p A = A, \quad A \mathbf{0}_{q,p} = \mathbf{0}_{q,p}, \quad \mathbf{0}_{q,p} A = \mathbf{0}_{q,p}.$$

**Exercice 64 :** Quel est le type de la matrice  $A$  dans chacune de ces règles ?

**Remarque :** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est la matrice de l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est celle du vecteur  $u \in \mathbb{R}^2$ , alors  $AX$  est la matrice colonne du vecteur  $f(u)$ . En pratique, on a le calcul suivant pour  $f(u)$  :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

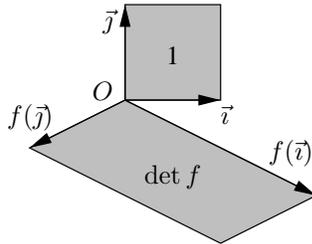
Il y a une formule analogue pour une matrice  $A$  de type quelconque.

### 3 Déterminant et inversion d'une matrice

#### 3.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

**Définition :** Le déterminant de l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est  $\det f = \det(f(\vec{i}), f(\vec{j}))$ .

**Remarque :**  $\det f$  est l'aire algébrique d'un parallélogramme, à savoir l'image par  $f$  du carré unité.



**Exercice 65 :** Calculer le déterminant de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dans chacun des cas suivants : *symétrie centrale, homothétie, symétrie orthogonale axiale, projection orthogonale axiale, affinité orthogonale axiale, rotation, similitude.*

**Exercice 66 :** Montrer que l'application  $\delta$  définie par  $\delta(u, v) = \det(f(u), f(v))$  est une forme bilinéaire alternée. En déduire la formule suivante :

$$\det(f(u), f(v)) = (\det f) \det(u, v).$$

**Remarque :** Cette formule exprime le fait que  $\det f$  est le *facteur de changement d'aire algébrique de  $f$* . Par suite,  $|\det f|$  est le *facteur de changement d'aire de  $f$* . A priori, il s'agit de l'aire d'un parallélogramme, mais en fait, cela vaut pour une forme quelconque : polygone, ellipse, ou autre.

**Exercice 67 :** Si  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont des applications linéaires, exprimer  $\det(g \circ f)$  en fonction de  $\det f$  et  $\det g$ .

**Définition :** Le déterminant de la matrice  $A$  est celui de l'application linéaire de matrice  $A$ . Autrement dit :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ alors } \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

**Exercice 68 :** Calculer  $\det I$  et exprimer  $\det AB$  en fonction de  $\det A$  et  $\det B$ . [Utiliser l'exercice précédent.]

**Exercice 69 :** Exprimer  $\det(\lambda A)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\det A$ .

**Exercice 70 :** Montrer qu'en général, on ne peut pas exprimer  $\det(A + B)$  comme une fonction de  $\det A$  et  $\det B$ . [Considérer le cas  $A = B = I$ , puis  $A = I$  et  $B = -I$ .]

#### 3.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

**Définition :** Le déterminant d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est  $\det f = \det(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k}))$ .

**Remarque :**  $\det f$  est le volume algébrique d'un parallélépipède, à savoir l'image par  $f$  du cube unité.

On montre également la formule suivante :

$$\det(f(u), f(v), f(w)) = (\det f) \det(u, v, w).$$

Autrement dit,  $\det f$  est le *facteur de changement de volume algébrique de  $f$* . Par suite,  $|\det f|$  est le *facteur de changement de volume de  $f$* . A priori, il s'agit du volume d'un parallélépipède, mais en fait, cela vaut pour une forme quelconque : polyèdre, ellipsoïde, ou autre.

**Exercice 71 :** Calculer le déterminant de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dans chacun des cas suivants : *symétrie centrale, homothétie, symétrie orthogonale plane, projection orthogonale plane, affinité orthogonale plane, symétrie orthogonale axiale, projection orthogonale axiale, rotation.*

Enfin, on définit le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 de sorte que le déterminant d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est celui de sa matrice :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \text{ alors } \det A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

**Exercice 72 :** Calculer  $\det I_3$  et exprimer  $\det AB$  en fonction de  $\det A$  et  $\det B$ .

**Exercice 73 :** Exprimer  $\det(\lambda A)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\det A$ . Comparer avec l'exercice 69.

### 3.3 Inverse d'une matrice carrée

**Définition :** Si  $AB = I_p$ , on dit que  $B$  est un *inverse à droite* de  $A$ , et que  $A$  est un *inverse à gauche* de  $B$ . On dit aussi que  $A$  est *inversible à droite* et que  $B$  est *inversible à gauche*.

**Exercice 74 :** La matrice  $I_p$  est-elle inversible à droite ? à gauche ? Mêmes questions pour la matrice  $O_{p,q}$ .

**Exercice 75 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$  une matrice ligne. Quels sont ses inverses à droite ? à gauche ?

**Exercice 76 :** Montrer que si  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $p$  inversible à droite ou à gauche, alors  $\det A \neq 0$ .

**Exercice 77 :** Montrer que si  $AC = BC$  et  $C$  est inversible à droite, alors  $A = B$  (*simplification à droite*).

**Remarque :** De même, si  $AB = AC$  et  $A$  est inversible à gauche, alors  $B = C$  (*simplification à gauche*).

**Exercice 78 :** Montrer que si  $B$  est un inverse à droite de  $A$  et  $C$  est un inverse à gauche de  $A$ , alors  $B = C$ .

On considère maintenant le cas d'une matrice  $A$  carrée d'ordre  $p$ .

**Définition :** On dit que  $B$  est un *inverse* de  $A$  si  $B$  est à la fois un inverse à droite et un inverse à gauche de  $A$ , c'est-à-dire si  $B$  est une matrice carrée d'ordre  $p$  telle que  $AB = I_p = BA$ . On dit alors que  $A$  est *inversible*.

**Exercice 79 :** Montrer que si  $A$  est inversible, alors il existe un unique inverse de  $A$ , qui est aussi l'unique inverse à droite de  $A$  et l'unique inverse à gauche de  $A$ .

**Notation :** On note alors  $A^{-1}$  cet unique inverse, et plus généralement, on pose  $A^{-n} = (A^{-1})^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque :**  $A^{-1}$  est inversible, et son inverse est  $A$ .

**Exercice 80 :** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $p$  inversibles, alors  $AB$  est aussi inversible. Quel est son inverse ?

**Exercice 81 :** Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $A^n$  est aussi inversible pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Quel est son inverse ? [Commencer par le cas  $n \in \mathbb{N}$ .]

**Remarque :** On n'écrit pas  $\frac{1}{A}$  pour  $A^{-1}$ , ni surtout  $\frac{A}{B}$  pour  $AB^{-1}$ . Pourquoi ?

### 3.4 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et posons  $A^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . [La notation standard est  ${}^t\tilde{A}$ .]

**Exercice 82 :** Calculer  $A^{\sharp\sharp}$  et  $\det A^\sharp$ . Dans quel cas a-t-on  $A = A^\sharp$  ?

**Exercice 83 :** Calculer  $AA^\sharp$  et  $A^\sharp A$ . En déduire que si  $\det A \neq 0$ , alors  $A$  est inversible, et dans ce cas, exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A^\sharp$  (*formule de l'inverse*). En déduire le théorème ci-dessous :

**Théorème 1 :** Pour toute matrice  $A$  carrée d'ordre 2, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $A$  est inversible;
2.  $A$  est inversible à droite;
3.  $A$  est inversible à gauche;
4.  $\det A \neq 0$ .

**Remarque :** Dans ce cas, on ne parlera plus d'inverse à droite ou d'inverse à gauche, mais seulement d'inverse.

**Exercice 84 :** Inverser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et vérifier qu'on a bien  $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ .

**Exercice 85 :** Inverser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Exercice 86 :** Donner un exemple de matrice carrée non nulle, mais non inversible.

**Exercice 87 :** Dans le cas où  $A$  est inversible, exprimer  $\det A^{-1}$  en fonction de  $\det A$ .

**Exercice 88 :** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées d'ordre 2 telles que  $C = AB$  est inversible, alors  $A$  et  $B$  sont aussi inversibles. Dans ce cas, exprimer  $A^{-1}$  et  $B^{-1}$  en fonction de  $A$ ,  $B$ , et  $C^{-1}$ .

**Exercice 89 :** Montrer qu'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\det f = 0$  n'est ni surjective, ni injective. [Considérer l'image et le noyau de  $f$ .] En déduire le théorème ci-dessous :

**Théorème 2 :** Pour toute application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est bijective;
2.  $f$  est surjective;
3.  $f$  est injective;
4.  $\det f \neq 0$ .

Dans ce cas, l'application réciproque  $f^{-1}$  est linéaire et sa matrice est l'inverse de celle de  $f$ .

**Remarque :** Ces théorèmes s'étendent au cas d'une matrice carrée d'ordre  $p$  et à celui d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ . De plus, il existe une formule pour l'inverse d'une matrice carrée d'ordre  $p$  (*formule de Cramer*).

### 3.5 Méthode du pivot de Gauss

**Définition :** Une matrice carrée d'ordre 2 est dite *élémentaire* si elle est de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice  $I$  est élémentaire.

**Remarque :** Si  $E$  est une matrice élémentaire et  $A$  une matrice à 2 lignes, on calcule le produit  $EA$  en appliquant une des *opérations élémentaires* suivantes (figure 4) :

- multiplier la première ou la seconde ligne de  $A$  par un scalaire non nul ;
- ajouter un multiple de la seconde ligne de  $A$  à la première, ou réciproquement ;
- échanger les deux lignes de  $A$ .

**Exercice 90 :** Montrer que chaque matrice élémentaire est inversible et que son inverse est une matrice élémentaire.

**Remarque :** Cela signifie que les opérations élémentaires sont *réversibles*. De plus, en appliquant une opération élémentaire à une matrice inversible, on obtient encore une matrice inversible.

**Exercice 91 :** Montrer que si  $A$  est une matrice carrée d'ordre 2 inversible, alors on peut obtenir  $I$  en appliquant 4 opérations élémentaires successives à la matrice  $A$ . En déduire que  $A$  est le produit de 4 matrices élémentaires. [Appliquer la stratégie de la figure 5 et montrer qu'il ne peut y avoir d'échec si on part d'une matrice inversible.]

**Remarque :** Si on applique la stratégie de la figure 5 à une matrice non inversible, on arrive à un échec.

**Exercice 92 :** Montrer que si on applique la même suite d'opérations élémentaires aux matrices  $A$  et  $I$ , et si on obtient les matrices  $I$  et  $B$ , alors  $B$  est l'inverse de  $A$ .

**Remarque :** C'est une méthode alternative pour inverser une matrice carrée. Les deux matrices sont nécessaires : c'est la première qui détermine la suite d'opérations élémentaires, mais c'est la seconde qui donne le résultat final. On n'est pas obligé d'appliquer exactement la stratégie de la figure 5. En fait, toute suite d'opérations élémentaires est licite, mais en pratique, on cherche toujours celle qui donne les calculs les plus courts ou les plus simples.

**Exercice 93 :** Inverser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  par cette méthode.

**Exercice 94 :** Montrer que cette méthode permet aussi de calculer le déterminant.

**Définition :** Une *opération élémentaire sur une matrice*  $A$  de type quelconque consiste à multiplier une ligne de  $A$  par un scalaire non nul, à ajouter un multiple d'une ligne de  $A$  à une autre, ou à échanger deux lignes de  $A$ .

La méthode d'inversion présentée ci-dessus s'étend aux matrices carrées d'ordre  $p$  : on part des matrices  $A$  et  $I_p$ , et on arrive à  $I_p$  et  $A^{-1}$  par une suite d'opérations élémentaires. C'est la *méthode du pivot de Gauss*.

**Exercice 95 :** Inverser la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  par cette méthode et vérifier qu'on a  $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$ .

**Remarque :** Quelle que soit la méthode utilisée (*formule de Cramer* ou *pivot de Gauss*), une vérification s'impose, mais en pratique, il suffit de vérifier  $AA^{-1} = I_3$  (ou  $A^{-1}A = I_3$ ). Pourquoi ?

**Exercice 96 :** Montrer que si  $A$  est une matrice carrée d'ordre 3 inversible, alors on peut obtenir  $I_3$  en appliquant 9 opérations élémentaires successives à la matrice  $A$ . En déduire que  $A$  est le produit de 9 matrices élémentaires. [Chercher un analogue de la stratégie de la figure 5 en distinguant les deux phases de la figure 6.]

Un système linéaire peut être considéré comme une équation entre deux matrices colonnes. Par exemple, le système linéaire  $\begin{cases} x + 2y = x' \\ 3x + 4y = y' \end{cases}$ , s'écrit aussi  $AX = X'$  où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

**Exercice 97 :** Exprimer la solution  $X$  en fonction de  $A^{-1}$  et  $X'$ .

La méthode du pivot de Gauss est aussi une méthode de résolution des systèmes linéaires.

**Exercice 98 :** Exprimer  $x, y, z$  en fonction de  $x', y', z'$  sachant que  $\begin{cases} y + 2z = x' \\ 3x + 4y + 3z = y' \\ 2x + y = z' \end{cases}$ .

**Remarque :** Pour inverser une matrice, il suffit donc de résoudre le système linéaire associé. Autrement dit, l'inversion d'une matrice est un cas particulier de résolution d'un système linéaire

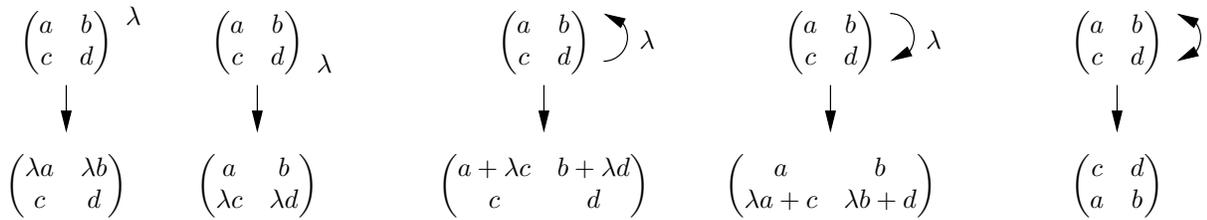


FIG. 4 – Opérations élémentaires sur une matrice à 2 lignes

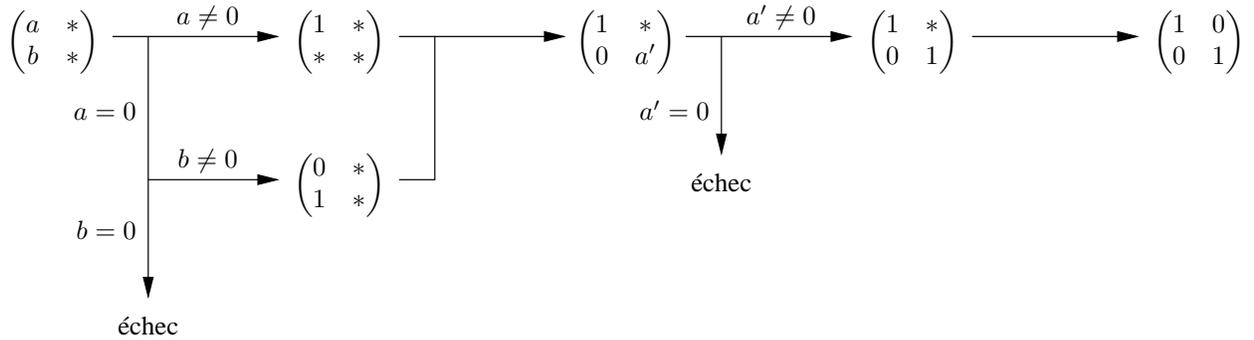


FIG. 5 – Algorithme de Gauss pour une matrice carrée d'ordre 2

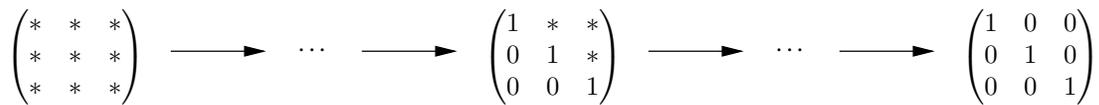


FIG. 6 – Les deux phases de l'algorithme de Gauss pour une matrice carrée d'ordre 3

## 4 Diagonalisation et changement de base

### 4.1 Valeurs propres et vecteurs propres

**Définition :** On dit que le scalaire  $\lambda$  est une *valeur propre* de l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  s'il existe un vecteur  $u \neq 0$  tel que  $f(u) = \lambda u$ . Un tel  $u$  s'appelle un *vecteur propre* de  $f$  associé à la *valeur propre*  $\lambda$ .

**Exercice 99 :** Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dans les cas suivants : *symétrie centrale, homothétie de rapport  $\rho$ , symétrie orthogonale, projection orthogonale, affinité orthogonale de rapport  $\rho$ , rotation d'angle  $\theta$* .

**Remarque :** Le scalaire 0 est une valeur propre de  $f$  si et seulement si le *noyau*  $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^p \mid f(u) = 0\}$  contient des vecteurs non nuls, c'est-à-dire si  $f$  n'est pas injective, autrement dit, si  $\det f = 0$ .

**Exercice 100 :** Montrer que le scalaire  $\lambda$  est une *valeur propre* de  $f$  si et seulement si on a  $\det(f - \lambda \text{id}) = 0$ .

Les valeurs propres de  $f$  sont donc les racines du polynôme  $\Gamma$  défini par  $\Gamma(\lambda) = \det(f - \lambda \text{id})$ . C'est un polynôme de degré  $p$ , appelé *polynôme caractéristique* de  $f$ .

Les *valeurs propres*, les *vecteurs propres* et le *polynôme caractéristique* d'une matrice carrée  $A$  sont celles et ceux de l'application linéaire  $f$  de matrice  $A$ . En particulier, le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\Gamma(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ .

**Remarque :** Dans le cas où  $p = 2$ , on doit résoudre une équation du second degré. Selon le cas, il y a deux valeurs propres réelles, ou une seule valeur propre réelle, ou aucune valeur propre réelle. Pour trouver les vecteurs propres associés, on résout un système linéaire.

**Exercice 101 :** Quelles sont les valeurs propres réelles des matrices suivantes ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas, on donnera les vecteurs propres et une interprétation géométrique.

**Remarque :** Si la matrice  $A$  est *diagonale*, c'est-à-dire de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , alors ses valeurs propres sont  $a$  et  $b$ .

**Exercice 102 :** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On note  $\lambda$  et  $\mu$  les racines du polynôme caractéristique de  $A$ .

1. Exprimer la somme  $\lambda + \mu$  et le produit  $\lambda\mu$  en fonction des coefficients  $a, b, c, d$ .
2. Montrer que si  $\det A < 0$ , alors  $A$  a deux valeurs propres réelles de signes opposés.
3. Montrer que si  $b$  et  $c$  ont le même signe, alors  $A$  a deux valeurs propres réelles distinctes.

### 4.2 Diagonalisation en dimension 2

**Définition :** Une *base* de  $\mathbb{R}^2$  est la donnée de 2 vecteurs  $u, v$  non colinéaires. Autrement dit,  $\det(u, v) \neq 0$ .

**Exercice 103 :** Montrer que, dans ce cas, pour tout  $w \in \mathbb{R}^2$ , il existe un unique  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $w = xu + yv$ . [Un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues dont le déterminant est non nul a une solution unique.]

**Remarque :** Si  $u, v$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , alors toute application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de la forme suivante :

$$f(xu + yv) = (ax + by)u + (cx + dy)v, \text{ où } a, b, c, d \text{ sont donnés par } au + cv = f(u) \text{ et } bu + dv = f(v).$$

**Définition :** Dans ce cas, on dit que  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est la *matrice de  $f$  dans la base  $u, v$* .

**Définition :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire de matrice  $A$  dans la base canonique. On dit que  $f$  (ou  $A$ ) est *diagonalisable* s'il existe une base de vecteurs propres de  $f$ , autrement dit, s'il existe une base telle que la matrice de  $f$  dans cette base est diagonale. En particulier, une matrice diagonale est diagonalisable.

**Exercice 104 :** Montrer que si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a deux valeurs propres réelles distinctes, alors elle est diagonalisable. [Choisir un vecteur propre pour chaque valeur propre, puis montrer que ces deux vecteurs forment une base.]

**Exercice 105 :** Réciproquement, montrer que si une matrice carrée d'ordre 2 est diagonalisable et *non diagonale*, alors elle a deux valeurs propres réelles distinctes.

**Exercice 106 :** Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le cas échéant, on donnera une base de vecteurs propres.

### 4.3 Changement de base

**Définition :** À une base  $u, v$  de  $\mathbb{R}^2$ , on associe la *matrice de passage* dont les colonnes sont les matrices respectives de  $u$  et  $v$  dans la base canonique.

**Exemple :** Si  $u = \vec{i} + \vec{j}$  et  $v = \vec{j} - \vec{i}$ , alors  $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Par définition, la matrice  $P$  est toujours inversible. De plus, elle permet de *passer d'une base à l'autre* :

1. si  $X$  est la matrice colonne de  $w$  dans la base  $u, v$ , alors la matrice de  $w$  dans la base canonique est  $PX$  ;
2. si  $X$  est la matrice colonne de  $w$  dans la base canonique, alors la matrice de  $w$  dans la base  $u, v$  est  $P^{-1}X$ .

Elle permet aussi de calculer la matrice d'une application linéaire  $f$  dans la base  $u, v$  à partir de sa matrice  $A$  dans la base canonique. Pour cela, on considère la matrice colonne  $X$  d'un vecteur  $w$  dans la base  $u, v$  :

1. la matrice de  $w$  dans la base canonique est  $PX$  ;
2. celle de  $f(w)$  dans la base canonique est donc  $APX$  ;
3. celle de  $f(w)$  dans la base  $u, v$  est donc  $P^{-1}APX$  ;

On en déduit que la matrice de  $f$  dans la base  $u, v$  est  $P^{-1}AP$ .

**Exercice 107 :** Soient  $f$  et  $g$  les applications linéaires dont les matrices respectives dans la base canonique sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices respectives de  $f$  et  $g$  dans la base  $u, v$ , où  $u = \vec{i} + \vec{j}$  et  $v = \vec{j} - \vec{i}$ .

**Exercice 108 :** Si  $B$  est la matrice de  $f$  dans la base  $u, v$ , quelle est la matrice de  $f$  dans la base canonique ?

**Exercice 109 :** Si  $B = P^{-1}AP$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , exprimer  $B^n$  en fonction de  $A^n$  et  $A^n$  en fonction de  $B^n$ .

**Exercice 110 :** Montrer que si  $B = P^{-1}AP$ , alors les matrices  $A$  et  $B$  ont le même déterminant, le même polynôme caractéristique, et les mêmes valeurs propres. [Développer  $P^{-1}(A - \lambda I)P$ .]

### 4.4 Diagonalisation et changement de base en dimension 3

**Définition :** Une *base* de  $\mathbb{R}^3$  est la donnée de 3 vecteurs  $u, v, w$  non coplanaires. Autrement dit,  $\det(u, v, w) \neq 0$ .

On a de même la décomposition unique de tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  dans la base  $u, v, w$ . On a aussi la notion de *matrice d'une application linéaire dans la base  $u, v, w$* , ainsi que les notions de matrices *diagonales* et *diagonalisables*.

**Remarque :** Dans ce cas, le polynôme caractéristique  $\Gamma$  est de degré 3. Or un tel polynôme a au moins une racine réelle. Donc toute matrice carrée d'ordre 3 a au moins une valeur propre réelle.

**Exercice 111 :** Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dans les cas suivants : *symétrie centrale*, *homothétie de rapport  $\rho$* , *symétrie orthogonale plane* ou *axiale*, *projection orthogonale plane* ou *axiale*, *affinité orthogonale plane de rapport  $\rho$* , *rotation d'angle  $\theta$* .

**Exercice 112 :** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre 3. Montrer que si  $\det A > 0$  (respectivement  $\det A < 0$ ), alors  $A$  a au moins une valeur propre positive (respectivement négative). [Calculer les limites de  $\Gamma(\lambda)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .]

**Exercice 113 :** Montrer qu'une matrice carrée d'ordre 3 est diagonalisable si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite : elle a trois valeurs propres réelles distinctes ; ou elle a deux valeurs propres réelles distinctes et il existe deux vecteurs propres non colinéaires associés à l'une d'elle ; ou elle est de la forme  $\lambda I$ .

**Exercice 114 :** Soit  $f$  l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que 1 est une valeur propre de cette matrice, et donner un vecteur propre  $u$  associé.
2. Donner un vecteur  $v$  non nul et orthogonal à  $u$ , puis calculer  $w = u \wedge v$ .
3. Donner la matrice de passage  $P$  associée à la base  $u, v, w$  et calculer  $P^{-1}$ .
4. Montrer que la base formée des vecteurs  $u' = \frac{1}{\|u\|}u$ ,  $v' = \frac{1}{\|v\|}v$ , et  $w' = \frac{1}{\|w\|}w$  est *orthonormée directe* :

$$u' \perp v', \quad u' \perp w', \quad v' \perp w', \quad \det(u', v', w') = 1.$$

5. Montrer que la matrice de passage associée à cette base est de la forme  $PQ$  où la matrice  $Q$  est diagonale.
6. Calculer la matrice de  $f$  dans la base  $u', v', w'$ . [Calculer  $(PQ)^{-1}$  à partir de  $P^{-1}$  et  $Q^{-1}$ .]
7. En déduire l'interprétation géométrique de  $f$ .

## 5 Matrices orthogonales et matrices symétriques

### 5.1 Transposée

**Définition :** Si  $A$  est une matrice à  $q$  lignes et  $p$  colonnes, sa *transposée*  ${}^tA$  est la matrice à  $p$  lignes et  $q$  colonnes dont les lignes correspondent aux colonnes de  $A$  (et réciproquement).

Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 et des matrices (colonnes ou lignes) de vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  :

$${}^t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad {}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y), \quad {}^t(x \ y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si  $p = q$ , alors  ${}^tA$  s'obtient en échangeant les coefficients symétriques par rapport à la *diagonale principale*, et si  $X$  est la matrice colonne d'un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , alors  ${}^tX$  est sa matrice ligne, et vice-versa.

**Remarque :** Si  $u$  et  $u'$  sont des vecteurs de matrices colonnes respectives  $X$  et  $X'$ , alors on a  $u \cdot u' = {}^tX X'$ .

**Exercice 115 :** Vérifier les propriétés suivantes dans le cas des matrices carrées d'ordre 2 :

$${}^t{}^tA = A, \quad {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$

**Remarque :** Ces propriétés s'étendent aux matrices de types quelconques (voir la figure 7 pour le cas du produit). De plus, on a  ${}^t\mathbf{0}_{q,p} = \mathbf{0}_{p,q}$  et  ${}^tI_p = I_p$ .

**Exercice 116 :** Montrer que si  $A$  est une matrice carrée inversible, alors  ${}^tA$  est inversible et  ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ .

### 5.2 Matrice d'une forme bilinéaire

**Définition :** Une *forme bilinéaire* sur  $\mathbb{R}^p$  est une application  $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^p$ , les deux applications  $u \mapsto \varphi(u, v)$  et  $u \mapsto \varphi(v, u)$  sont linéaires. Autrement dit, on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi(u + u', v) &= \varphi(u, v) + \varphi(u', v), & \varphi(\lambda u, v) &= \lambda \varphi(u, v), \\ \varphi(u, v + v') &= \varphi(u, v) + \varphi(u, v'), & \varphi(u, \lambda v) &= \lambda \varphi(u, v). \end{aligned}$$

**Exemples :** Le produit scalaire est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^p$ . Le déterminant est une forme bilinéaire sur  $\mathbb{R}^2$ .

À toute matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on associe la forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\varphi(u, u') = axx' + bxy' + cyx' + dyy' \quad \text{pour } u = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \text{et} \quad u' = (x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Réciproquement, toute forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est de cette forme. Pour reconstruire  $A$  à partir de  $\varphi$ , il suffit de poser  $a = \varphi(\vec{i}, \vec{i})$ ,  $b = \varphi(\vec{i}, \vec{j})$ ,  $c = \varphi(\vec{j}, \vec{i})$ , et  $d = \varphi(\vec{j}, \vec{j})$ .

**Définition :** Dans ce cas, on dit que  $\varphi$  est la *forme bilinéaire de matrice*  $A$ , ou que  $A$  est la *matrice de*  $\varphi$ .

**Exercice 117 :** Quelles sont les matrices respectives du produit scalaire et du déterminant (sur  $\mathbb{R}^2$ ) ?

**Exercice 118 :** Vérifier que si  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire de matrice  $A$  et  $u, u'$  sont des vecteurs de matrices colonnes respectives  $X$  et  $X'$ , alors on a  $\varphi(u, u') = {}^tXAX'$ .

**Définition :** Plus généralement, la matrice d'une forme bilinéaire  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}^p$  est la matrice carrée d'ordre  $p$  qui satisfait une telle identité pour  $u, u' \in \mathbb{R}^p$ .

**Remarque :** Toute matrice carrée d'ordre  $p$  définit à la fois une application linéaire  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  et une forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Par définition, on a  $\varphi(u, u') = u \cdot f(u')$  pour  $u, u' \in \mathbb{R}^p$ .

### 5.3 Changement de base

Soit  $u, v$  une base de  $\mathbb{R}^2$  et  $P$  la matrice de passage associée.

**Définition :** La *matrice d'une forme bilinéaire*  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dans la base  $u, v$  est  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  où :

$$a = \varphi(u, u), \quad b = \varphi(u, v), \quad c = \varphi(v, u), \quad d = \varphi(v, v).$$

Si  $w, w'$  sont des vecteurs de matrices colonnes respectives  $X$  et  $X'$  dans la base  $u, v$ , on a donc  $\varphi(w, w') = {}^tXAX'$ .

**Exercice 119 :** Montrer que si  $A$  est la matrice d'une forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (dans la base canonique), alors la matrice de  $\varphi$  dans la base  $u, v$  est  ${}^tPAP$ . [Utiliser la formule de changement de base pour les vecteurs.]

**Remarque :** En particulier, la matrice du produit scalaire dans la base  $u, v$  est  ${}^tPP$ .

On définit de même la matrice d'une forme bilinéaire  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dans une base de  $\mathbb{R}^3$ . La formule de changement de base est alors la même que pour  $\mathbb{R}^2$ .

## 5.4 Matrices orthogonales

**Définition :** Une *matrice orthogonale* est une matrice carrée  $A$  d'ordre  $p$  telle que  ${}^tAA = I_p$ .

Autrement dit, une matrice carrée  $A$  est orthogonale si elle est inversible et si  $A^{-1} = {}^tA$ .

**Exercice 120 :** Vérifier que la matrice de passage associée à une base  $u, v$  de  $\mathbb{R}^2$  est orthogonale si et seulement si cette base est *orthonormée*, c'est-à-dire si on a  $u \perp v$  et  $\|u\| = \|v\| = 1$ .

**Remarque :** D'après la section précédente, la matrice de passage est orthogonale si et seulement si la matrice de produit scalaire dans cette base est  $I$ .

**Exercice 121 :** Montrer que la matrice d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (dans la base canonique) est orthogonale si et seulement si  $f$  *préserve le produit scalaire* : autrement dit, si  $u, u' \in \mathbb{R}^2$ , alors  $f(u) \cdot f(u') = u \cdot u'$ .

**Exercice 122 :** Montrer que le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, et que l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

## 5.5 Matrices symétriques

**Définition :** Une *matrice symétrique* est une matrice carrée  $A$  telle que  ${}^tA = A$ .

En particulier, une matrice carrée d'ordre 2 symétrique est une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

**Exemple :** Les matrices diagonales sont symétriques.

**Exercice 123 :** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées d'ordre  $p$  symétriques, alors la matrice  $AB$  est symétrique si et seulement si  $A$  commute avec  $B$ .

**Exercice 124 :** Montrer que si  $P$  et  $A$  sont des matrices carrées d'ordre  $p$  et la matrice  $P$  est orthogonale, alors la matrice  $A$  est symétrique si et seulement si la matrice  $P^{-1}AP = {}^tPAP$  est symétrique.

**Exercice 125 :** Montrer que la matrice d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (dans la base canonique) est symétrique si et seulement si  $f$  satisfait la propriété suivante : si  $u, u' \in \mathbb{R}^2$ , alors  $f(u) \cdot u' = u \cdot f(u')$ .

**Exercice 126 :** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application linéaire dont la matrice est symétrique.

1. Montrer que  $f$  a des valeurs propres réelles. [Calculer le discriminant du polynôme caractéristique.]
2. Montrer que si  $u, v$  forment une base orthogonale de  $\mathbb{R}^2$  et  $u$  est un vecteur propre de  $f$ , alors  $v$  est aussi un vecteur propre de  $f$ . [Utiliser l'exercice précédent.]
3. En déduire le théorème ci-dessous :

**Théorème 3 :** La matrice d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (dans la base canonique) est symétrique si et seulement si  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée.

**Remarque :** Autrement dit, une matrice carrée  $A$  d'ordre 2 est symétrique si et seulement s'il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que la matrice  $P^{-1}AP = {}^tPAP$  est diagonale.

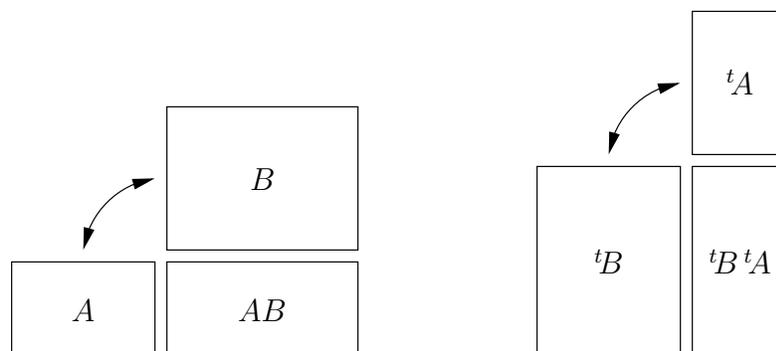


FIG. 7 – Transposée de la matrice  $AB$

## 6 Compléments de géométrie

### 6.1 Équation d'un cercle ou d'une sphère

**Définition :** La distance entre deux points  $u, v \in \mathbb{R}^p$  est  $d(u, v) = \|u - v\|$ .

Si  $u_0$  est un point du plan  $\mathbb{R}^2$ , le cercle de centre  $u_0$  et de rayon  $\rho \geq 0$  est donc :

$$\mathcal{C} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid d(u, u_0) = \rho\} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u - u_0\|^2 = \rho^2\}.$$

Si on pose  $u_0 = (x_0, y_0)$  et  $u = (x, y)$ , on obtient ainsi l'équation cartésienne  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ .

**Exemple :** Le cercle de centre  $u_0 = (1, 0)$  et de rayon 2 a pour équation  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ , soit  $x^2 + y^2 - 2x = 3$ .

**Exercice 127 :** À quelle condition sur les coefficients  $a, b, c$  l'équation cartésienne  $x^2 + y^2 + ax + by = c$  définit-elle un cercle dans  $\mathbb{R}^2$  ? Quels sont alors le centre et le rayon de ce cercle ?

**Exercice 128 :** Quelle est l'équation cartésienne de la sphère de centre  $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$  et de rayon  $\rho$  ?

**Exercice 129 :** Montrer que le cercle de centre  $u_0$  et de rayon  $\rho$  est  $\mathcal{C} = \{u_0 + \rho v_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi[ \}$  où on pose  $v_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ . En déduire un système paramétrique pour  $\mathcal{C}$ . [Tout vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^2$  est de la forme  $v_\theta$ .]

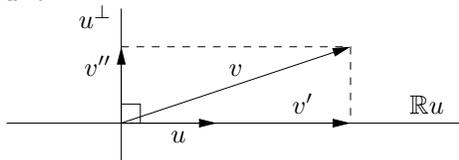
**Exercice 130 :** Montrer que la sphère de centre  $u_0$  et de rayon  $\rho$  est  $\mathcal{S} = \{u_0 + \rho v_{\theta, \varphi} \mid \theta \in [0, 2\pi[, \varphi \in [0, \pi[ \}$  où on pose  $v_{\theta, \varphi} = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ . En déduire un système paramétrique pour  $\mathcal{S}$ .

**Exercice 131 :** À partir des propriétés de la norme euclidienne, montrer celles de la distance euclidienne :

$$d(v, u) = d(u, v), \quad d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \quad d(u, v) = 0 \text{ si et seulement si } u = v.$$

### 6.2 Projections orthogonales

**Théorème 4 :** Si  $u$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^p$ , alors tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^p$  se décompose de façon unique en  $v = v' + v''$  avec  $v' \in \mathbb{R}u$  et  $v'' \in u^\perp$ .



Dans ce cas, on a  $v' = \lambda u$  et  $u \cdot v = u \cdot v' + u \cdot v''$  avec  $u \cdot v' = \lambda u \cdot u = \lambda \|u\|^2$  et  $u \cdot v'' = 0$ , d'où les formules :

$$\begin{cases} v' = \lambda u, \\ v'' = v - \lambda u, \end{cases} \quad \text{avec } \lambda = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2}.$$

Réciproquement, ceci donne bien une décomposition  $v = v' + v''$  avec  $v' \in \mathbb{R}u$  et  $v'' \in u^\perp$ . C.Q.F.D.

**Remarque :** Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , l'ensemble  $u^\perp$  est une droite vectorielle. Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , c'est un plan vectoriel.

**Définition :** On dit que les vecteurs  $v'$  et  $v''$  sont les *projetés orthogonaux* de  $v$  respectivement sur  $\mathbb{R}u$  et sur  $u^\perp$ .

**Remarque :** Si on note  $w$  le symétrique de  $v$  par rapport à la droite  $\mathbb{R}u$ , alors le projeté  $v'$  de  $v$  sur  $\mathbb{R}u$  est le milieu de  $v$  et  $w$  : autrement dit,  $v' = \frac{1}{2}(v + w)$ , d'où  $w = 2v' - v$ . Si  $P$  est la matrice de la projection orthogonale sur la droite  $\mathbb{R}u$ , alors la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\mathbb{R}u$  est donc  $S = 2P - I_p$ .

**Exercice 132 :** Soit  $u = (a, b)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^2$ . Calculer la matrice de la projection orthogonale sur l'axe  $\mathbb{R}u$ , puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $\mathbb{R}u$ . Même question pour  $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 133 :** Montrer que si  $v'$  et  $v''$  sont les projetés orthogonaux de  $v$  respectivement sur  $\mathbb{R}u$  et sur  $u^\perp$ , on a :

$$\|v'\| = \frac{|u \cdot v|}{\|u\|}, \quad \|v''\| = \frac{|\det(u, v)|}{\|u\|} \quad (\text{dans le plan } \mathbb{R}^2), \quad \|v''\| = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\|} \quad (\text{dans l'espace } \mathbb{R}^3).$$

[Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , exprimer  $|u \cdot v|$  et  $|\det(u, v)|$  en fonction de  $\|v'\|$  et  $\|v''\|$ . Utiliser le fait que  $|u \cdot v| = \|u\| \|v\|$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires, et le fait que  $|\det(u, v)| = \|u\| \|v\|$  si et seulement si ils sont orthogonaux.]

**Remarque :**  $\|v'\|$  est aussi la distance entre le point  $v$  et la droite vectorielle ou le plan vectoriel  $u^\perp$ . De même,  $\|v''\|$  est la distance entre le point  $v$  et la droite vectorielle  $\mathbb{R}u$ .

**Définition :** L'angle  $\theta$  entre les vecteurs  $u$  et  $v$  est déterminé par les formules suivantes :

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}, \quad \sin \theta = \frac{\det(u, v)}{\|u\| \|v\|} \quad (\text{dans le plan } \mathbb{R}^2), \quad \sin \theta = \frac{\|u \wedge v\|}{\|u\| \|v\|} \quad (\text{dans l'espace } \mathbb{R}^3).$$

**Remarque :** Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on a toujours  $\sin \theta \geq 0$  car cet angle est *non orienté* : autrement dit,  $\theta \in [0, \pi]$ . Dans ce cas, on peut aussi retrouver le sinus à partir du cosinus :  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ .

### 6.3 Équation d'un cylindre

Pour calculer la distance entre un point  $u$  et une droite ou un plan affine passant par un point  $u_0$ , on se ramène au cas vectoriel en appliquant la translation de vecteur  $-u_0$ . Ainsi, dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ , la distance entre le point  $u$  et la droite parallèle au vecteur  $v$  passant par le point  $u_0$  est :

$$d(u, u_0 + \mathbb{R}v) = d(u - u_0, \mathbb{R}v) = \frac{\|(u - u_0) \wedge v\|}{\|v\|}.$$

Le cylindre de rayon  $\rho \geq 0$  dont l'axe est la droite parallèle à  $v$  passant par  $u_0$  est donc :

$$C = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid d(u, u_0 + \mathbb{R}v) = \rho\} = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \|(u - u_0) \wedge v\|^2 = \rho^2 \|v\|^2\}.$$

**Exemple :** Pour  $u_0 = (0, 0, 2)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ , et  $\rho = 3$ , on obtient l'équation cartésienne suivante :

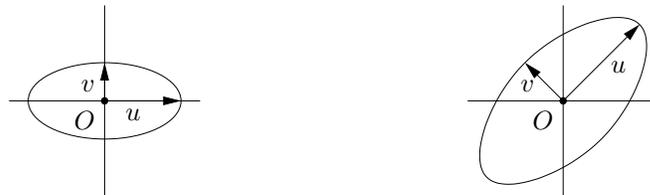
$$\left| \begin{matrix} y & 1 \\ z-2 & 0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x & 1 \\ z-2 & 0 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} x & 1 \\ y & 1 \end{matrix} \right|^2 = 18, \quad \text{soit} \quad x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 8z = 10.$$

**Exercice 134 :** Calculer l'équation de l'intersection de ce cylindre avec le plan d'équation  $y = 0$ , et donner l'interprétation géométrique de cette intersection. Même question pour l'intersection avec le plan d'équation  $z = 0$ .

### 6.4 Équation d'une ellipse

Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non nuls et orthogonaux de  $\mathbb{R}^2$  : autrement dit, ils forment une base orthogonale, mais pas forcément orthonormée. On considère la courbe  $\mathcal{E}$  d'équation  $x^2 + y^2 = 1$  dans la base  $u, v$ .

**Remarque :** Si  $\|u\| = \|v\| = 1$ , c'est-à-dire si la base est orthonormée,  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. De même, si  $\|u\| = \|v\| = \rho$ , c'est le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\rho$ . Si  $\|u\| \neq \|v\|$ , alors  $\mathcal{E}$  est une ellipse. Les vecteurs  $u$  et  $v$  déterminent les axes de l'ellipse : le plus grand correspond au grand axe et le plus petit au petit axe. Si  $\|u\| > \|v\|$ , alors  $\|u\|$  est le demi-grand axe et  $\|v\|$  est le demi-petit axe. Ici, le centre est toujours l'origine  $O$ .



Pour trouver l'équation de  $\mathcal{E}$  dans la base canonique, il suffit de faire un changement de base.

**Exemple :** Si  $u = 2\vec{i}$  et  $v = \vec{j}$ , l'équation de  $\mathcal{E}$  dans la base canonique est  $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$ , soit  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

**Exercice 135 :** Donner l'équation de  $\mathcal{E}$  si  $u = a\vec{i}$  et  $v = b\vec{j}$ , c'est-à-dire si un axe est horizontal et l'autre vertical.

**Exemple :** Si  $u = 2\vec{i} + 2\vec{j}$  et  $v = \vec{j} - \vec{i}$ , alors la matrice de passage est  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  et on a  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ . L'équation est donc  $(\frac{x+y}{4})^2 + (\frac{2y-2x}{4})^2 = 1$ , soit  $5x^2 + 5y^2 - 6xy = 16$ .

On considère maintenant le cas où la base  $u, v$  n'est pas orthogonale. On va montrer que  $\mathcal{E}$  est encore une ellipse, bien qu'ici, les vecteurs  $u$  et  $v$  ne correspondent plus aux axes de cette ellipse.

**Remarque :** Soit  $P$  la matrice de passage associée à la base  $u, v$ . On pose  $A = P^{-1}$  et on note  $X$  la matrice  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . L'équation de  $\mathcal{E}$  dans la base canonique s'écrit alors  ${}^t(AX)(AX) = 1$ , soit  ${}^tXBX = 1$  avec  $B = {}^tAA$ .

**Exercice 136 :** Montrer que pour toute matrice carrée d'ordre 2  $A$  inversible, la matrice  $B = {}^tAA$  est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives. [Commencer par calculer  $\det {}^tA$ , puis  $\det B$ .]

D'après le théorème 3, la matrice  $B$  est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, si on note  $Q$  la matrice de passage associée à cette base orthonormée, la matrice  $C = Q^{-1}BQ = {}^tQBQ$  est diagonale. Dans cette base, l'équation de  $\mathcal{E}$  est  $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$  avec  $\alpha, \beta > 0$ . D'après l'exercice 135, il s'agit bien d'une ellipse.

On peut interpréter ce résultat en termes de transformations linéaires :

**Théorème 5 :** L'image d'un cercle par une transformation linéaire (bijective) du plan  $\mathbb{R}^2$  est une ellipse.

**Remarque :** Pour retrouver l'ellipse à partir de son équation  $ax^2 + by^2 + 2cxy = d$ , on diagonalise  $B = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$  dans une base orthonormée, puis on réécrit l'équation dans cette base.

**Exercice 137 :** Retrouver par cette méthode les axes de l'ellipse d'équation  $x^2 + y^2 + xy = 3$ .

## 7 Complexes

### 7.1 Forme algébrique

**Définition :** Un nombre complexe  $z = x + iy$  est la donnée de deux nombres réels  $x = \Re(z)$  (partie réelle de  $z$ ) et  $y = \Im(z)$  (partie imaginaire de  $z$ ). L'ensemble des nombres complexes est  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ .

**Remarque :** Pour  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  avec  $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ , on a  $z = z'$  si et seulement si  $x = x'$  et  $y = y'$ . Autrement dit, la forme algébrique d'un complexe est unique.

La somme, l'opposé et la différence sont définis comme pour les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$ , de même que le produit par un réel. Le produit s'étend aux complexes en posant  $i^2 = -1$ . On a donc  $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$ .

**Définition :** Si  $z = x + iy$ , on pose  $\bar{z} = x - iy$  (conjugué de  $z$ ) et  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$  (module de  $z$ ).

**Remarque :** L'inverse se calcule à partir du conjugué :  $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$  si  $z = x + iy \neq 0$ .

**Exercice 138 :** Calculer la forme algébrique du quotient  $z/z'$  pour  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  avec  $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ .

**Remarque :** On a aussi les identités suivantes :  $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  et  $\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{i(\bar{z} - z)}{2}$ .

**Exercice 139 :** À quelle condition a-t-on  $\bar{z} = z$ ? À quelle condition a-t-on  $\bar{z} = -z$ ?

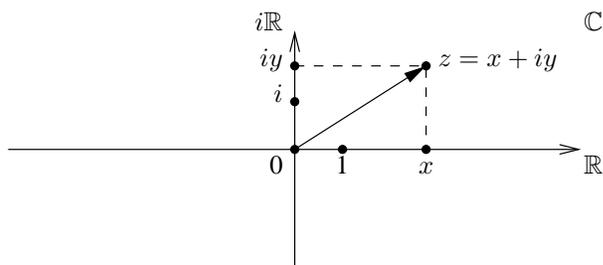
**Exercice 140 :** Montrer que le conjugué et le module satisfont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, & \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}', & \overline{-z} &= -\bar{z}, & \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}', & \overline{1/z} &= 1/\bar{z} \text{ pour } z \neq 0. \\ |\bar{z}| &= |z|, & |-z| &= |z|, & |zz'| &= |z||z'|, & |z| &= 0 \text{ ssi } z = 0, & |1/z| &= 1/|z| \text{ pour } z \neq 0. \end{aligned}$$

**Remarque :** On a aussi l'inégalité triangulaire  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

### 7.2 Plan complexe

On représente le complexe  $z = x + iy$  par le point d'affixe  $z$  (c'est-à-dire de coordonnées  $x$  et  $y$ ) dans le plan, ou encore par le vecteur de composantes  $x$  et  $y$ .



Dans cette représentation, l'origine est 0 et la base canonique est  $1, i$ . Les ensembles  $\mathbb{R}$ ,  $i\mathbb{R}$ , et  $\mathbb{C}$  sont appelés respectivement *axe réel*, *axe imaginaire*, et *plan complexe*. Chaque opération a une interprétation géométrique :

- l'opération  $z \mapsto -z$  correspond à la *symétrie centrale* par rapport à l'origine 0 ;
- l'opération  $z \mapsto \bar{z}$  correspond à la *symétrie orthogonale* par rapport à l'axe réel ;
- si  $c = a + ib$ , l'opération  $z \mapsto z + c$  correspond à la *translation* de vecteur  $c$  ;
- si  $a \in \mathbb{R}$ , l'opération  $z \mapsto az$  correspond à l'*homothétie* de rapport  $a$  ;
- si  $c = a + ib$ , l'opération  $z \mapsto cz$  correspond à la *similitude* de matrice  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

De plus,  $|z|$  est la *norme euclidienne* du vecteur  $z$ , c'est-à-dire la distance entre l'origine 0 et le point  $z$ .

**Remarque :** On pourrait aussi définir  $\mathbb{C}$  comme l'ensemble des *matrices de similitudes* du plan  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 141 :** Quelle est l'interprétation géométrique de l'opération  $z \mapsto -\bar{z}$ ?

**Définition :** Le *cercle unité* est l'ensemble  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . C'est aussi le cercle de centre 0 et de rayon 1.

En particulier,  $1, -1, i$  et  $-i$  sont des éléments de  $\mathbb{U}$ .

**Exercice 142 :** Montrer les propriétés suivantes :

$$\text{si } z, z' \in \mathbb{U} \text{ alors } zz' \in \mathbb{U}, \quad \text{si } z \in \mathbb{U} \text{ alors } -z \in \mathbb{U} \text{ et } 1/z = \bar{z} \in \mathbb{U}.$$

**Exercice 143 :** En dehors de  $1, -1, i$  et  $-i$ , existe-t-il des éléments de  $\mathbb{U}$  dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers (respectivement des rationnels)? [Chercher des entiers  $p, q, r$  tels que  $p^2 + q^2 = r^2$ .]

### 7.3 Racines carrées

**Définition :** Une *racine carrée* du complexe  $c$  est un complexe  $z$  tel que  $z^2 = c$ .

**Exercice 144 :** Quelles sont ces racines carrées dans le cas où  $c \in \mathbb{R}$  ? [Distinguer les cas  $c > 0$ ,  $c = 0$ , et  $c < 0$ .]

**Théorème 6 :** Tout complexe  $c \neq 0$  a deux racines carrées opposées qui sont notées  $\pm\sqrt{c}$ .

En effet, soit  $c = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ . On cherche  $z = x + iy$  tel que  $z^2 = c$ , c'est-à-dire  $x^2 - y^2 = a$  et  $2xy = b$ . Or on a aussi  $x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |c|$ , si bien que  $x^2$  et  $y^2$  sont les solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} X + Y = |c|, \\ X - Y = a. \end{cases}$$

En général, cela donne quatre possibilités pour  $z = x + iy$ , mais comme l'équation  $2xy = b$  impose que  $x$  et  $y$  aient le même signe si  $b > 0$ , ou des signes différents si  $b < 0$ , il ne reste en fait que deux solutions opposées.

**Exemple :** Les racines carrées de  $1 - i$  sont  $\pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$ .

**Remarque :** La notation  $\sqrt{c}$  (non précédée du symbole  $\pm$ ) n'a de sens que dans le cas où  $c$  est un réel positif : comme les deux racines carrées sont réelles, on choisit de noter  $\sqrt{c}$  celle qui est positive.

**Exercice 145 :** Résoudre les équations suivantes et représenter toutes les solutions dans le plan complexe :

$$z^2 = 1, \quad z^4 = 1, \quad z^8 = 1.$$

### 7.4 Équations du second degré

**Définition :** Un *polynôme complexe* de degré 2 est une fonction de la forme  $f(z) = az^2 + bz + c$  avec  $a, b, c \in \mathbb{C}$ .

**Exercice 146 :** Exprimer les coefficients  $a, b, c$  en fonction de  $f(0)$ ,  $f(1)$  et  $f(-1)$ . [Résoudre un système linéaire.]

**Théorème 7 :** Si  $f(z) = az^2 + bz + c$  avec  $a \neq 0$ , on a la factorisation  $f(z) = a(z - \alpha)(z - \beta)$  où  $\alpha, \beta$  sont les racines complexes  $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$  avec  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Ces racines sont aussi les solutions de l'équation  $f(z) = 0$ .

**Exercice 147 :** Exprimer  $\alpha + \beta$  et  $\alpha\beta$  en fonction des coefficients  $a, b, c$ . [Développer le polynôme  $a(z - \alpha)(z - \beta)$ .] À partir de là, retrouver la formule pour les racines  $\alpha, \beta$ . [Exprimer  $(\alpha - \beta)^2$  en fonction de  $(\alpha + \beta)^2$  et de  $\alpha\beta$ .]

**Remarque :** Si  $b = 2b'$ , les racines s'écrivent aussi  $\frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$  avec  $\Delta' = b'^2 - ac = \frac{\Delta}{4}$  (*discriminant réduit*).

**Exemple :** Les racines de  $z^2 + 2iz - 2 + i$  sont  $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} + 1 \right)$  et  $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i \left( \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - 1 \right)$ .

**Remarque :** Si le discriminant  $\Delta$  est nul, on a la factorisation  $f(z) = a(z - \alpha)^2$  où  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  est la *racine double*.

**Exercice 148 :** Résoudre les équations suivantes et représenter toutes les solutions dans le plan complexe :

$$z^3 = 1, \quad z^6 = 1, \quad z^{12} = 1.$$

[Commencer par factoriser  $f(z) = z^3 - 1$  en remarquant que l'équation  $z^3 - 1 = 0$  a une solution évidente.]

### 7.5 Exponentielle imaginaire

**Définition :** L'*exponentielle imaginaire* est l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(\theta) = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

En particulier, on a  $e^0 = e^{2i\pi} = 1$ ,  $e^{i\pi} = -1$ , et  $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$ .

**Exercice 149 :** En utilisant les formules trigonométriques, montrer les propriétés suivantes :

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = 1/e^{i\theta}.$$

**Remarque :** L'exponentielle imaginaire est périodique (de période  $2\pi$ ) et son *image*  $f(\mathbb{R})$  est le cercle unité  $\mathbb{U}$ .

Réciproquement, le cosinus et le sinus s'expriment à partir de l'exponentielle imaginaire (*formules d'Euler*) :

$$\cos \theta = \Re(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \Im(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{i(e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{2}.$$

De plus, si  $u = e^{i\theta}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $u^n = e^{in\theta}$ , d'où la *formule de Moivre* :  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ .

**Exercice 150 :** En utilisant les formules d'Euler ainsi que les propriétés de l'exponentielle imaginaire, retrouver les formules trigonométriques pour  $\cos(-\theta)$ ,  $\sin(-\theta)$ ,  $\cos(\theta + \theta')$ ,  $\sin(\theta + \theta')$ ,  $\cos \theta \cos \theta'$ ,  $\sin \theta \sin \theta'$ , et  $\sin \theta \cos \theta'$ .

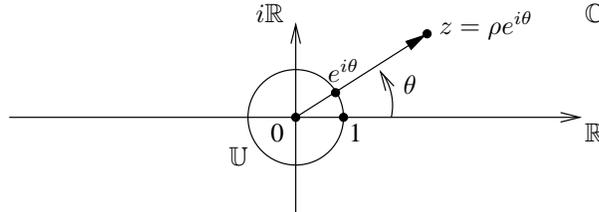
## 7.6 Forme trigonométrique

Tout complexe  $z \neq 0$  est de la forme  $z = \rho u$  avec  $\rho = |z| > 0$  et  $u = z/\rho \in \mathbb{U}$ . D'après ce qui précède, on a :

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \text{ avec } \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

**Remarque :** Pour  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z' = \rho' e^{i\theta'}$  avec  $\rho, \rho' > 0$  et  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ , on a  $z = z'$  si et seulement si  $\rho = \rho'$  et  $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Autrement dit, le *module*  $\rho$  est unique et l'*argument*  $\theta$  est défini modulo  $2\pi$ .

Le module et l'argument de  $z$  sont les *coordonnées polaires* du point d'affixe  $z$  :



Cela permet d'expliciter l'interprétation géométrique de la multiplication par  $c = \rho e^{i\theta}$  : l'opération  $z \mapsto cz$  correspond à la *similitude* de rapport  $\rho$  et d'angle  $\theta$ . En particulier,  $z \mapsto e^{i\theta} z$  correspond à la *rotation* d'angle  $\theta$ .

À partir des propriétés de l'exponentielle imaginaire, on obtient les règles de calcul suivantes :

$$|\rho e^{i\theta}| = \rho, \quad \rho e^{i\theta} \rho' e^{i\theta'} = \rho \rho' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}, \quad \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}.$$

**Remarque :** On a aussi  $-\rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+\pi)}$ , mais il n'y a pas de règle simple pour la somme  $\rho e^{i\theta} + \rho' e^{i\theta'}$ .

**Exercice 151 :** Pour  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z' = \rho' e^{i\theta'}$ , quelle est la forme trigonométrique du quotient  $z/z'$  ?

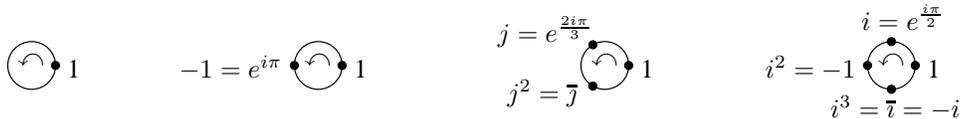
## 7.7 Racines n-ièmes

**Définition :** Si  $n \geq 1$ , une *racine n-ième* du complexe  $c$  est un complexe  $z$  tel que  $z^n = c$ .

**Exercice 152 :** Montrer que 1 admet  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes  $1, u, u^2, \dots, u^{n-1}$  où  $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

**Remarque :** C'est dans cet ordre qu'apparaissent les racines si on parcourt  $\mathbb{U}$  dans le *sens trigonométrique*.

Les racines  $n$ -ièmes de 1 sont aussi appelées *racines n-ièmes de l'unité*. Pour  $n = 1, 2, 3, 4$ , on obtient :



**Exercice 153 :** Retrouver les valeurs remarquables du cosinus et du sinus en utilisant les exercices 145 et 148.

**Exercice 154 :** Montrer que si  $z = \rho e^{i\theta}$ , alors  $v = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta}{n}}$  est une racine  $n$ -ième de  $z$ , et que si  $v'$  est une autre racine  $n$ -ième de  $z$ , alors  $v'/v$  est une racine  $n$ -ième de l'unité. En déduire le théorème ci-dessous :

**Théorème 8 :**  $z = \rho e^{i\theta}$  admet  $n$  racines  $n$ -ièmes distinctes  $v, vu, vu^2, \dots, vu^{n-1}$  où  $v = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta}{n}}$  et  $u = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ .

**Remarque :** Ces racines  $n$ -ièmes s'obtiennent en appliquant la similitude  $z \mapsto vz$  aux racines  $n$ -ièmes de l'unité. Elles forment un *polygone régulier à n sommets*.

**Exercice 155 :** Calculer la somme des racines  $n$ -ièmes de  $z$ . [C'est la somme d'une suite géométrique.]

**Définition :** S'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que  $z$  est une racine  $n$ -ième de 1, on dit que  $z$  est une *racine de l'unité*.

**Exercice 156 :** À quelles conditions sur  $\rho$  et  $\theta$  le complexe  $z = \rho e^{i\theta}$  est-il une racine de l'unité ?

## 7.8 Exponentielle complexe

**Définition :** L'*exponentielle complexe* est l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par la formule suivante :

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y \quad \text{pour } z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 157 :** Montrer les propriétés suivantes :

$$|e^z| = e^{\Re(z)}, \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \quad e^{-z} = 1/e^z.$$

**Exercice 158 :** Étant donné  $c = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , résoudre l'équation  $e^z = c$  dans  $\mathbb{C}$ .