Examen

MAT13 - Calcul matriciel

23 mai 2005

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculettes et téléphones interdits.

Ce sujet comporte 2 pages et ainsi qu'une feuille supplémentaire pour répondre à l'exercice 5.

Exercice 1 : Le détail des calculs est seulement demandé pour la question d. et une justification pour la question e. Pour les trois premières questions, on donnera seulement le résultat.

a. Calculer le déterminant et l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Donner l'interprétation géométrique de chacune de ces matrices.

c. Donner un exemple de matrice non nulle et non inversible.

d. Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e. Quel est le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, et $3\vec{\imath}$?

Exercice 2 : On pose $u = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $v = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, où $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $\mathcal{C}$ l'intersection $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}$ où $\mathcal{H} = u^\perp$ et $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $u_0 = au$ et de rayon $r \geqslant 0$.

a. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{H}$. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{H}$?

b. Donner une équation cartésienne de S.

c. Montrer que $u \perp v$ et déterminer un vecteur w tel que u, v, w forment une base orthogonale directe de $\mathbb{R}^3$.

d. En déduire une base de $\mathcal{H}$ et un système paramétrique pour $\mathcal{H}$.

e. Déterminer trois vecteurs $u' \in \mathbb{R}u$, $v' \in \mathbb{R}v$, $w' \in \mathbb{R}w$ tels que u', v', w' forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

f. En déduire une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

g. Donner les coordonnées du point u_0 dans la base u', v', w', puis une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ dans cette base.

h. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans la base orthonormée de $\mathcal{H}$.

i. À quelle condition sur a et r a-t-on $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Quelle est alors l'interprétation géométrique de $\mathcal{C}$?

Exercice 3 : La *suite de Fibonacci* est définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, et $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.

a. Calculer les entiers $a_2, \ldots, a_5$.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices $A^2, \ldots, A^5$ et montrer que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} \end{pmatrix}$ pour tout $n \geqslant 2$.

c. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres α, β de A. [*On notera α la plus grande des deux.*]

d. Exprimer α^2 en fonction de α en utilisant uniquement l'addition et une constante.

e. Montrer que $u = \alpha\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $v = \beta\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ sont des vecteurs propres de A. [*Utiliser la question précédente.*]

f. Écrire la matrice de passage P associée à cette base et calculer son inverse P^{-1}.

g. Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Calculer les coefficients de la matrice D^n puis de $(PDP^{-1})^n$.

h. En déduire une formule explicite (non-récurrente) pour a_n.

Exercice 4 : Si A est une matrice quelconque, on note ${}^tA$ la *transposée* de A obtenue en échangeant les rôles des lignes et des colonnes de A. On rappelle que si le produit AB est défini, alors on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. Si A est une matrice carrée d'ordre p et si on a ${}^tA = A$, on dit que A est *symétrique*. Si on a ${}^tA\,A = \mathrm{I}_p$, on dit que la matrice A est *orthogonale*.

a. Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont symétriques et lesquelles sont orthogonales ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que si A est une matrice carrée d'ordre p, alors le produit ${}^tAA$ est une matrice symétrique.

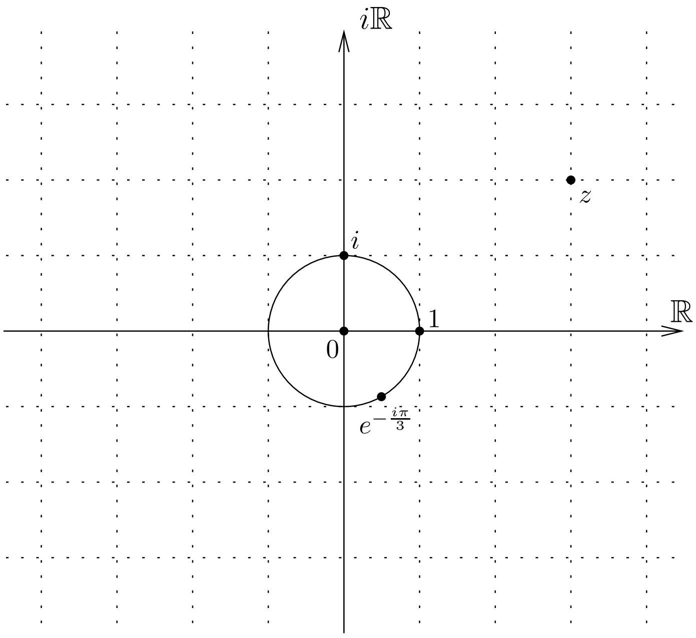
c. Montrer que si A et B sont des matrices carrées d'ordre p orthogonales, alors AB est une matrice orthogonale.

d. Calculer le produit ${}^tXAX'$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

e. Soit A une matrice carrée d'ordre 2. Montrer qu'on a ${}^tXAX' = {}^tXX'$ pour tout choix de colonnes X et X' si et seulement si A est la matrice I_2. [*Utiliser les matrices colonnes des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.]

f. En déduire que la matrice A d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est orthogonale si et seulement si on a $f(u) \cdot f(u') = u \cdot u'$ pour tout choix de vecteurs u et u' dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : Sur la figure ci-dessous, on a représenté le repère du plan complexe $\mathbb{C}$ formé de l'origine d'affixe 0 et des points d'affixes respectives 1 et i. On a également représenté le cercle unité ainsi que le point d'affixe $e^{-\frac{i\pi}{3}}$.



Dans les questions qui suivent, on vous demande de placer des points sur cette figure. Veillez à bien annoter chaque point avec son affixe. N'hésitez pas à expliquer vos constructions, ou à calculer explicitement les coordonnées des points lorsque cela vous paraît nécessaire. Une feuille séparée est fournie pour les réponses, mais vous pouvez utiliser la figure ci-dessus comme brouillon. Si vos calculs sont justes, et en vous aidant des éléments déjà présents sur la figure, le seul outil nécessaire pour placer tous les points est une règle ou un crayon un peu droit.

a. On pose $z = 3 + 2i$. Sur la figure, le point d'affixe z est déjà mentionné. Placez les points d'affixes respectives

$$iz, \quad -z, \quad \overline{z}, \quad -\overline{z}, \quad \mathfrak{Re}(z), \quad \frac{z - \overline{z}}{2}, \quad \frac{z}{|z|}, \quad \frac{|z|}{z}.$$

b. Placez précisément le point d'affixe $2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ après avoir calculé la forme algébrique de ce complexe.

c. Placez précisément le point d'affixe $\sqrt{3} - 3i$ après avoir calculé la forme trigonométrique de ce complexe.

d. Calculez les racines quatrièmes de -4 en forme algébrique et placez les points correspondants sur la figure.