

Examen de calcul matriciel (Licence MASHS - MI - SPC, S2)

14 mai 2008

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 : Soient O, P, Q trois points du plan. On pose $u = \overrightarrow{OP}$ et $v = \overrightarrow{OQ}$.

- a. Exprimer le vecteur $w = \overrightarrow{PQ}$ en fonction de u et v .
- b. Exprimer $\|w\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$, et $u \cdot v$.
- c. En déduire la formule pour le produit scalaire $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ en fonction des distances OP , OQ , et PQ .
- d. Trouver des valeurs entières non nulles pour ces trois distances telles que ce produit scalaire soit nul.

Exercice 2 : On cherche un polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, et $P(4) = 2$.

- a. Montrer que les coefficients a, b, c sont solutions d'un système linéaire que l'on écrira.
- b. Quelle est la matrice associée à ce système ? Est-elle inversible ?
- c. Calculer les coefficients a, b, c .

Plus généralement, on dit qu'un polynôme du second degré P est un *polynôme d'interpolation* pour les couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ si on a $P(x_i) = y_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

- d. Écrire le système linéaire permettant de calculer les coefficients d'un tel polynôme.
 - e. Donner un exemple de couples $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ pour lesquels un tel polynôme n'existe pas.
- On suppose maintenant que $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
- f. À quelle condition sur x_3 existe-t-il un unique polynôme d'interpolation ?

Exercice 3 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Quelles sont les valeurs propres de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de matrice A ?
- b. Pour chaque valeur propre, donner l'ensemble des vecteurs propres et son interprétation géométrique.
- c. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} par la méthode de votre choix.
- d. Vérifier que P est la matrice de passage associée à une base de vecteurs propres de f .
- e. Quelle est la matrice B de f dans cette base ?
- f. Donner une formule pour (les coefficients de) la matrice B^n valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
- g. Exprimer B en fonction de P et A , puis A en fonction de P et B .
- h. En déduire une formule pour (les coefficients de) la matrice A^n valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 : On pose $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

- a. Écrire j, j^2, j^3 , et $-j^2$ sous forme trigonométrique (avec l'argument dans $[0, 2\pi]$).
- b. Calculer $(1 - j)(1 + j + j^2)$ et en déduire la valeur de $1 + j + j^2$.

Soient U, V, W trois points distincts d'affixes respectives $u, v, w \in \mathbb{C}$ tels que $u + jv + j^2w = 0$.

- c. Calculer $ju + j^2v + w$ puis $w - u + j^2(v - u)$.
- d. Quelle est l'interprétation géométrique de $v - u$ et $w - u$ (en tant que vecteurs) ?
- e. Quelle est l'interprétation géométrique de l'application $z \mapsto -j^2z$?
- f. En déduire la forme du triangle UVW .