Corrigé de l'exercice 114

Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que 1 est une valeur propre de cette matrice, et donner un vecteur propre associé.

Soit Γ le polynome caractéristique associé à cette matrice. On a $\Gamma(x) = det(A - xI_3)$. Pour prouver que 1 est valeur propre de cette matrice, il suffit de prouver que $\Gamma(1) = 0$.

$$\Gamma(1) = det(A - I_3) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 - 1 \times (-1) = 0.$$

On a démontré que 1 est une valeur propre de cette matrice. On cherche un vecteur propre $\vec{u}(x, y, z)$ associé. Il s'agit de trouver une solution à l'équation $f(\vec{u}) = \vec{u}$, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} z = x \\ x = y \\ y = z \end{cases}$$

Une solution possible de ce système est $x = 1, y = 1, z = 1$, soit $\vec{u}(1, 1, 1)$.

Donner un vecteur $\vec{v}$ non nul et orthogonal à $\vec{u}$, puis calculer $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

On cherche $\vec{v}(x, y, z)$ tel que $\vec{u}.\vec{v} = 0$, c'est-à-dire $1x + 1y + 1z = 0$.
Une solution possible est $x = 1, y = -1, z = 0$, soit $\vec{v}(1, -1, 0)$.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 - (-1) \times 1 \\ -(1 \times 0 - 1 \times 1) \\ 1 \times (-1) - 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Et on a $\vec{w}(1, 1, -2)$.

Donner la matrice de passage P associée à la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et calculer P^{-1}.

Il s'agit de placer dans les colonnes de P les coordonées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans la base canonique et on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On calcule la matrice P^{-1} par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 = L_2 - L_1$, $L_3 = L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 = (-1/2) \times L_2$. Le pivot est -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_1 = L_1 - L_2$, $L_3 = L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_3 = (-1/3) \times L_3$. Le pivot est -3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$L_1 = L_1 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

et on a

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la base formée des vecteurs $\vec{u'} = \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}$, $\vec{v'} = \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$, $\vec{w'} = \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}$ est orthonormée directe.

On a $\vec{u'}.\vec{v'} = \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}.\frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v} = \frac{1}{||\vec{u}||||\vec{v}||}\vec{u}.\vec{v} = 0$ (car $\vec{u}.\vec{v} = 0$).

On a également $\vec{w}.\vec{u} = \vec{w}.\vec{v} = 0$ car $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ ce qui permet d'obtenir de même $\vec{w'}.\vec{u'} = \vec{v'}.\vec{u'} = 0$.

On a $\det(\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}) = \det(\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}, \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}, \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}) = \frac{1}{||\vec{u}||}\frac{1}{||\vec{v}||}\frac{1}{||\vec{w}||}det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \frac{1}{||\vec{u}||||\vec{v}||||\vec{w}||}\det A$.

Le pivot de Gauss précédent permet également de calculer le determinant de A:

On a $\det A = \text{produit des pivots} \times (-1)^{\text{nombre d'échanges de lignes}} = (-2) \times (-3) \times (-1)^0 = 6$.

Par ailleurs $||\vec{u}||||\vec{v}||||\vec{w}|| = \sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$.

Donc $\det(\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}) = 1$ et on a démontré que $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$ est une base orthonormée directe.

Montrer que la matrice de passage associée à cette base est de la forme PQ où Q est une matrice diagonale.

Soit P' la matrice de passage de la base canonique vers $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$. On a

$$P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

On a par ailleurs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et on cherche Q de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

ce qui fait que

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & 0 & -2c \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'on obtient bien $PQ = P'$ si on choisit $a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{6}}$. On a démontré que la matrice de passage associée à cette base est de la forme PQ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Calculer la matrice de f dans la base $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$.

Soit B la matrice de f dans la base $\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'}$. On a donc $B = (PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}P^{-1}AP'$. P^{-1}, P' ont été calculés précédemment et

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}.$$

ATTENTION : il s'agit là d'une propriété particulière des matrices diagonales. Ce n'est pas vrai pour les matrices quelconques.

On obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'interprétation géometrique de f.

On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}.$$

f est donc la rotation d'axe $O\vec{w'}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.