# A Quelques problèmes sur les matrices

## A.1 Isométries vectorielles du plan

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une *isométrie vectorielle*, c'est-à-dire une application linéaire qui *préserve la norme euclidienne* : autrement dit, on a $\|f(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $f$ préserve aussi le produit scalaire : autrement dit, on a $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$. [*Exprimer d'abord* $u \cdot v$ *en fonction de* $\|u + v\|$, $\|u\|$ *et* $\|v\|$. *Utiliser ensuite le fait que* $f$ *est linéaire.*]
2. En déduire que les vecteurs $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ forment une *base orthonormée* de $\mathbb{R}^2$ : autrement dit, $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ sont à la fois *orthogonaux* et *unitaires* (c'est-à-dire de norme 1).

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de $f$ (dans la base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

3. Écrire les conditions sur les coefficients de $A$ exprimant le fait que $f(\vec{\imath})$ et $f(\vec{\jmath})$ forment une base orthonormée.
4. Montrer que toute matrice qui vérifie ces conditions est celle d'une isométrie vectorielle.
5. Vérifier que ces conditions sont satisfaites par les matrices suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

6. Montrer que toute matrice qui satisfait ces conditions est de la forme $R_\theta$ ou $S_\theta$ avec $-\pi < \theta \leqslant \pi$.
7. Calculer les matrices $R_\theta^2$ et $S_\theta^2$.
8. Quelle est l'interprétation géométrique de $R_\theta$ ? Pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \pi$, quelle est celle de $S_\theta$ ?

On suppose maintenant que $A = S_\theta$ avec $0 < |\theta| < \pi$. On pose $u = \vec{\imath} + f(\vec{\imath})$ et $v = \vec{\imath} - f(\vec{\imath})$.

9. Montrer que les deux vecteurs $u$ et $v$ sont orthogonaux et non nuls.
10. Exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de $u$ et $v$. [*Utiliser la linéarité de* $f$ *ainsi que la question 7.*]
11. Calculer les deux composantes du vecteur unitaire $\frac{1}{\|u\|}u$, et en déduire l'angle $\theta'$ entre les vecteurs $\vec{\imath}$ et $u$. [*Exprimer* $\cos\theta$ *en fonction de* $\cos\frac{\theta}{2}$, *puis* $\cos\frac{\theta}{2}$ *en fonction de* $\cos\theta$.]
12. Quelle est l'interprétation géométrique de $S_\theta$ ?

## A.2 Application affines en dimension 1

On considère ici $\mathbb{R}$ comme une droite, appelée *droite réelle*.

1. Quelle est l'interprétation géométrique de l'application $\tau_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\tau_b(x) = x + b$ ?
2. Quelle est celle de l'application $\sigma_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\sigma_b(x) = b - x$ ? [*Commencer par le cas* $b = 0$.]

Rappel : une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *affine* si elle est de la forme $f(x) = ax + b$.

3. À quelle condition l'application $f$ est-elle linéaire ?
4. À quelle condition l'application $f$ est-elle bijective ? Dans ce cas, quelle est sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?
5. À quelle condition l'application $f$ est-elle une *isométrie* de la droite réelle. Autrement dit : à quelle condition a-t-on $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ ?

À l'application affine $f$, on associe l'application linéaire $\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\widehat{f}(x, y) = (ax + by, y)$, de sorte que $\widehat{f}(x, 1) = (f(x), 1)$. La *matrice de l'application affine* $f$ est alors celle de l'application linéaire $\widehat{f}$.

6. À quelle condition une matrice carrée d'ordre 2 est-elle la matrice d'une application affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ?
7. Quelle est la matrice d'une *translation* de la droite réelle ? Quelle est celle d'une *symétrie* de la droite réelle ?
8. Montrer que si $A$ est la matrice de l'application affine $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $B$ est celle de l'application affine $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors $AB$ est la matrice d'une application affine $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer $h$ en fonction de $f$ et $g$.

## A.3 Matrices stochastiques

A Middle City, dans le Kansas, tout citoyen est républicain ou démocrate. Chaque année, 20% des républicains deviennent démocrates et 30% des démocrates deviennent républicains. Pour simplifier, on suppose que la liste des électeurs ne change pas.

1. Calculer le pourcentage des républicains qui seront démocrates et celui des démocrates qui seront républicains dans 2 ans, dans 3 ans, et dans 4 ans.
2. On suppose de plus que les pourcentages de républicains et de démocrates dans Middle City ne changent pas. Quels sont ces pourcentages ?

Un matrice $A$ à coefficients réels est dite *stochastique* si elle satisfait les deux conditions suivantes : ses coefficients sont positifs ou nuls, et la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où :

– si on est républicain : $a$ est la probabilité de rester républicain et $c$ est celle de devenir démocrate ;
– si on est démocrate : $b$ est la probabilité de devenir républicain et $d$ est celle de rester démocrate.

Remarque : Dans la littérature, on trouve souvent une définition analogue, mais avec la somme des coefficients de chaque *ligne* qui vaut 1. C'est fondamentalement la même notion, mais l'interprétation est légèrement différente.

3. Écrire la matrice $A$ correspondant à l'exemple de Middle City et calculer les matrices $A^2$, $A^3$, et $A^4$.
4. Montrer que si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées d'ordre 2 qui sont stochastiques, alors $AB$ est stochastique.
5. Montrer que si $A$ est une matrice carrée d'ordre 2 qui est stochastique, alors il existe une matrice colonne stochastique $X$ telle que $AX = X$, et que ce *point fixe* $X$ est unique, sauf dans un cas que l'on précisera.

On note $\Sigma_p$ la matrice ligne à $p$ colonnes $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. C'est la seule de ce type qui soit stochastique.

6. Si $A$ est une matrice à $q$ lignes et $p$ colonnes, à quelle condition a-t-on $\Sigma_q A = \Sigma_p$ ?
7. Montrer que si $A$ et $B$ sont des matrices stochastiques et si le produit $AB$ est défini, alors $AB$ est stochastique. [*Utiliser la question précédente.*]

## A.4 Nombres complexes et matrices de similitudes

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. La matrice ${}^tA$ s'appelle la *transposée de* $A$.

Si $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $M_z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

1. Exprimer les matrices $M_{z+z'}$ et $M_{zz'}$ en fonction de $M_z$ et de $M_{z'}$.
2. Exprimer les matrices $M_{\overline{z}}$ et $M_{z^{-1}}$ en fonction de $M_z$.
3. Exprimer le déterminant de $M_z$ en fonction de $z$.
4. Si $\rho > 0$, quelle est l'interprétation géométrique de $M_\rho$ ?
5. Si $z = e^{i\theta}$, quelle est l'interprétation géométrique de $M_z$ ?
6. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, quelle est l'interprétation géométrique de $M_z$ ?

## A.5 Matrices à coefficients entiers

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée *à coefficients entiers*, c'est-à-dire telle que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

1. Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si $\det A = \pm 1$, alors $A$ est inversible et $A^{-1}$ est aussi une matrice à coefficients entiers.
3. Réciproquement, montrer que si $A$ est inversible et $A^{-1}$ est aussi une matrice à coefficients entiers, alors $\det A = \pm 1$. [*Utiliser les propriétés du déterminant.*]