Examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

23 juin 2006

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculettes et téléphones interdits.

Ce sujet comporte deux pages.

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculez A^2, A^3 et A^{-1}.

b. Quelles sont les valeurs propres de cette matrice ? Est-elle diagonalisable ?

c. Trouvez une formule pour A^n et démontrez que cette formule est valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Indication : commencer par la démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a. La matrice A est-elle symétrique ? orthogonale ? inversible ?

b. Trouver un vecteur unitaire u dans le noyau de f.

c. Construire un vecteur unitaire v qui soit orthogonal à u.

d. Montrer que v est un vecteur propre de f et donner la valeur propre correspondante.

e. Exprimer $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v, et en déduire la matrice de f dans la base u, v.

La suite est une vérification des résultats précédents par une méthode directe.

f. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire ses valeurs propres. Comparer avec (b) et (d).

g. Construire la matrice de passage P associée à la base u, v et calculer P^{-1}.

h. Donner la signification géométrique de $P^{-1}AP$ et calculer cette matrice. Comparer avec (e).

Exercice 3 : On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

a. Montrer que les vecteurs $u = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $v = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Soit E la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans la base u, v.

b. Dessiner E et préciser quelle est la nature de cette courbe.

c. Donner l'équation de E dans la base canonique.

Exercice 4 : On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Soit P le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $u_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ et $u_2 = -2\vec{\imath} + \vec{k}$.

a. Donner un vecteur non nul v orthogonal au plan P.

b. Ecrire une équation cartésienne du plan P.

Notons f la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}v$ et g la projection orthogonale sur le plan P.

Soit w un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

c. Exprimer $f(w)$ en fonction de w et v.

d. Exprimer $g(w)$ en fonction de w et $f(w)$, puis en fonction de w et v.

e. Donner les matrices de f et g dans la base canonique.

Exercice 5 :

a. Ecrire les racines cubiques de l'unité en forme trigonométrique, puis en forme algébrique.

Remarque : aucune justification n'est demandée pour cette question.

On pose $\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$, où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

b. Montrer que si $z, z' \in \mathbb{Q}[i]$, alors $zz' \in \mathbb{Q}[i]$.

c. Montrer que si $z \in \mathbb{Q}[i]$ et $z \neq 0$, alors $1/z \in \mathbb{Q}[i]$.

d. Les racines cubiques de l'unité sont-elles dans $\mathbb{Q}[i]$?

e. Trouver $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a + ib$ soit un complexe de module 1 et distinct de 1, -1, i, $-i$.

Indication : chercher des entiers non nuls p, q tels que $p^2 + q^2$ soit un carré.