

Examen de calcul matriciel

Licence MASHS - MI - SPC, semestre 2

14 juin 2007

Durée de l'épreuve : 3 heures. Nombre de pages : 1. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On pose $u = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $f(u) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y .

On considère maintenant le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r > 0$, et on note $\mathcal{E}$ l'image réciproque de $\mathcal{C}$ par f , c'est-à-dire l'ensemble des $u \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(u) \in \mathcal{C}$.

b. Ecrire l'équation de $\mathcal{C}$, puis celle de $\mathcal{E}$, dans la base canonique.

c. À quelles conditions sur les coefficients a, b, c, d l'ensemble $\mathcal{E}$ est-il un cercle ?

d. Donner une interprétation géométrique de ces conditions. [Considérer les vecteurs $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$.]

Exercice 2 : On note $\mathcal{G}$ l'ensemble de toutes les matrices de la forme $R_a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

a. Quelle est l'interprétation géométrique de la matrice R_a ?

b. Calculer $R_a R_b$ et montrer que $R_a R_b \in \mathcal{G}$. [Trouver c tel que $R_a R_b = R_c$.]

c. Calculer $\det(R_a)$ puis R_a^{-1} , et montrer que $R_a^{-1} \in \mathcal{G}$.

d. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $R_a = I$?

On pose $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e. Pour quelles valeurs de $a \in [0, 2\pi[$ a-t-on $R_a^2 = B$?

f. Calculer les coefficients de chacune des matrices R_a ainsi obtenues.

Exercice 3 : On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Quelle est l'interprétation géométrique de la matrice D ?

b. Quelles sont ses valeurs propres ?

Soit A une matrice (carrée d'ordre 2) quelconque.

c. À quelles conditions sur les coefficients de A a-t-on $AD = DA$?

d. À quelles conditions sur les coefficients de A a-t-on $AD = EA$?

Soit P une matrice (carrée d'ordre 2) inversible.

e. Quelles sont les valeurs propres de la matrice $B = PDP^{-1}$?

f. Montrer que si la matrice B est diagonale, alors on a $PD = DP$ ou $PD = EP$.

g. Trouver une matrice inversible P dont les coefficients valent 0 ou 1, telle que $PD \neq DP$ et $PD \neq EP$.

h. Calculer la matrice B dans ce cas.

Exercice 4 : Soient $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 1 - i$ dans $\mathbb{C}$. On pose $w = \frac{u}{v}$.

a. Calculer w en forme algébrique.

b. Ecrire u et v , puis w , en forme trigonométrique.

c. Trouver un entier $n > 0$ tel que w^n soit réel, et calculer ce réel.