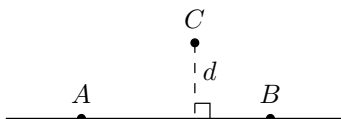


Examen de calcul matriciel (Licence MASHS - MI - SPC, S2)

11 juin 2008

Durée de l'épreuve : 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 : Soient A, B, C trois points du plan, et soit d la distance entre la droite (AB) et le point C .



- a. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction des vecteurs $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.
- b. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de la norme $\|u\|$ et de la distance d .
- c. En déduire une formule pour la distance d en fonction des vecteurs u et v .
- d. Mêmes questions dans le cas où A, B, C sont trois points de l'espace $\mathbb{R}^3$.
- e. Calculer la distance d dans le cas suivant : $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 2)$, et $C = (2, 1, 4)$.

Exercice 2 : Soit $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $s(\vec{i}) = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $s(\vec{j}) = -3\vec{i} - 2\vec{j}$.

- a. Écrire la matrice S de s dans la base canonique $\vec{i}, \vec{j}$.
 - b. Calculer son carré S^2 et son inverse S^{-1} .
 - c. Quelles sont les valeurs propres de s ?
 - d. Trouver une base de vecteurs propres de s et écrire la matrice de s dans cette base.
- On considère maintenant une matrice M carrée d'ordre 2 et on suppose que $M^2 = I$.
- e. La matrice M est-elle inversible ?
 - f. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y, z) = (x + z, y, x + y + z)$.

- a. Écrire la matrice M de f dans la base canonique $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et donner les images $f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})$.
- b. La matrice M est-elle inversible ?

On considère le noyau et l'image de f : $\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = \vec{0}\}$ et $\operatorname{im} f = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^3\}$.

- c. Montrer que $\ker f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera un vecteur directeur $\vec{i}'$.
- d. Montrer que tout vecteur de $\operatorname{im} f$ est de la forme $xf(\vec{i}) + yf(\vec{j}) + zf(\vec{k})$ avec $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- e. En déduire que $\operatorname{im} f$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera une base $\vec{j}', \vec{k}'$.
- f. Montrer que les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
- g. Calculer les vecteurs $f(\vec{i}'), f(\vec{j}'), f(\vec{k}')$.
- h. Exprimer ces derniers en fonction de $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ et en déduire la matrice M' de f dans la base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$.

Exercice 4 : On considère le polynôme $f(z) = z^3 + 8$ où z est une variable complexe.

- a. Exprimer f comme le produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.
- b. Exprimer les racines de f sous forme algébrique.
- c. Exprimer les racines de f sous forme exponentielle (ou trigonométrique).
- d. Quelle est la forme géométrique de cet ensemble de racines ?