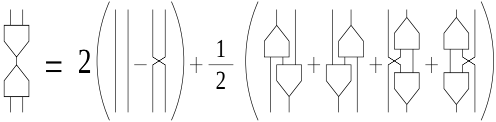
Diagrammes et co-opérations

RANNOU Pierre

15 juin 2010

Un premier exemple

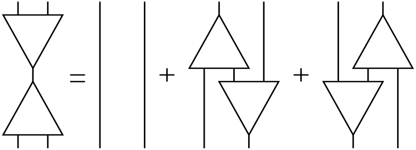
$$\begin{aligned}\delta_{[,]}[X,Y] &= 2(X\otimes Y - Y\otimes X)\\ &\quad +\tfrac{1}{2}(X_{[1]}\otimes[X_{[2]},Y]+[X,Y_{[1]}]\otimes Y_{[2]}\\ &\quad +Y_{[1]}\otimes[X,Y_{[2]}]+[X_{[1]},Y]\otimes X_{[2]})\end{aligned}$$



Quelques définitions,

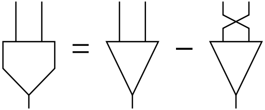
nonunitary infinitesimal

$$\delta(XY) = X \otimes Y + X_1 \otimes X_2 Y + XY_1 \otimes Y_2$$



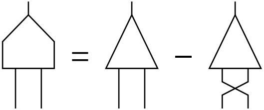
Lie bracket

$$[X, Y] = XY - YX$$



Lie cobracket

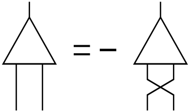
$$\delta_{[,]}(X) = \delta(X) - \tau\delta(X)$$



Et quelques propriétés,

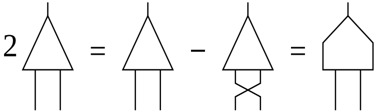
anti-cocommutativity for Lie polynomials

$$\delta(X) = -\tau\delta(X) \text{ where } \tau(X \otimes Y) = (Y \otimes X)$$



corollary

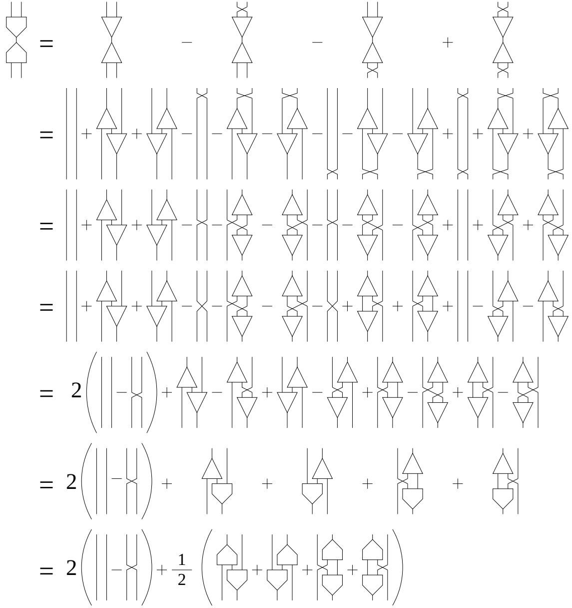
$$2\delta(X) = \delta(X) - \tau\delta(X) = \delta_{[,]}(X)$$



Preuve

$$
\begin{aligned}
\delta_{[,]}[X,Y] &= (\delta-\tau\delta)(XY-YX)\\
&= \delta(XY)-\delta(YX)-\tau\delta(XY)+\tau\delta(YX)\\
&= X\otimes Y+X_1\otimes X_2Y+XY_1\otimes Y_2-Y\otimes X-Y_1\otimes Y_2X-YX_1\otimes X_2\\
&\quad -Y\otimes X-X_2Y\otimes X_1-Y_2\otimes XY_1+X\otimes Y+Y_2X\otimes Y_1+X_2\otimes YX_1\\
&= X\otimes Y+X_1\otimes X_2Y+XY_1\otimes Y_2-Y\otimes X-Y_1\otimes Y_2X-YX_1\otimes X_2\\
&\quad -Y\otimes X+X_1Y\otimes X_2+Y_1\otimes XY_2+X\otimes Y-Y_1X\otimes Y_2-X_1\otimes YX_2\\
&= 2(X\otimes Y-Y\otimes X)+X_1\otimes X_2Y-X_1\otimes YX_2+XY_1\otimes Y_2-Y_1X\otimes Y_2\\
&\quad +Y_1\otimes XY_2-Y_1\otimes Y_2X+X_1Y\otimes X_2-YX_1\otimes X_2\\
&= 2(X\otimes Y-Y\otimes X)\\
&\quad +X_1\otimes[X_2,Y]+[X,Y_1]\otimes Y_2+Y_1\otimes[X,Y_2]+[X_1,Y]\otimes X_2\\
&= 2(X\otimes Y-Y\otimes X)+\frac{1}{2}(X_{[1]}\otimes[X_{[2]},Y]+[X,Y_{[1]}]\otimes Y_{[2]}\\
&\quad +Y_{[1]}\otimes[X,Y_{[2]}]+[X_{[1]},Y]\otimes X_{[2]})
\end{aligned}
$$

Preuve



(by 2 and 3)

(by 1)

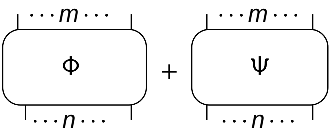
(by 4)

(by 2)

(by 5)

Σ-diagrams

Les Σ-diagrammes sur $\mathcal{Q}$ sont des diagrammes avec une nouvelle opération : la somme (et la multiplication par un scalaite $\lambda \in \mathbb{Z}$).



Interprétation :

- Σ-diagrammes : $f : \mathbb{Z}(\mathcal{Q}^m) \rightarrow \mathbb{Z}(\mathcal{Q}^n)$
- Composition parallèle : $f \otimes f'$
- Somme et multiplication scalaire : $\lambda f + g$

Règles :

$$\phi \longrightarrow \Psi$$

Où ϕ est un diagramme, et Ψ un Σ-diagramme.

Déconcatenation sur le semi-goupe libre

L'alphabet A, et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$,

Déconcatenation sur le semi-goupe libre

L'alphabet A, et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$,pour $w \in S$:

$$\delta(w) = \sum_{w=u\cdot v} u \otimes v$$

Exemple :$\delta(abaa) = a \otimes baa + ab \otimes aa + aba \otimes a$

Déconcatenation sur le semi-goupe libre

L'alphabet A, et le semi-groupe libre $S = A^+$.

Définition : $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S \otimes \mathbb{Z}S = \mathbb{Z}S^2$,pour $w \in S$:

$$\delta(w) = \sum_{w=u\cdot v} u \otimes v$$

Exemple :$\delta(abaa) = a \otimes baa + ab \otimes aa + aba \otimes a$
définition récursive :

- $\forall a \in A$, $\delta(a) = 0$
- for $u, v \in S$, $\delta(u \cdot v) = \delta(u) \cdot v + u \otimes v + u \cdot \delta(v)$

$$u \cdot (v \otimes v') = (u \cdot v) \otimes v' (v \otimes v') \cdot u = v \otimes (v' \cdot u)$$

Théorème

La déconcatenation sur S est coassociative :

Théorème

La déconcaténation sur S est coassociative :

$$\delta(w) = \Sigma u_i \otimes v_i \text{ alors,}$$

$$\Sigma \delta(u_i) \otimes v_i = \Sigma u_i \otimes \delta(v_i)$$

Σ-diagramme et déconcaténation (semi-groupe)

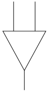
Portes :

Concaténation   Déconcaténation

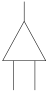
Σ-diagramme et déconcaténation (semi-groupe)

Portes :

Concaténation



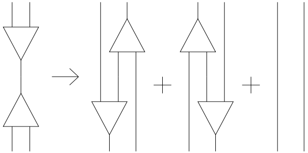
Déconcaténation



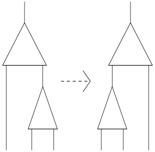
Règles :

Interaction

$$\delta(u \cdot v) = u \cdot \delta(v) + \delta(u) \cdot v + u \otimes v$$

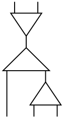
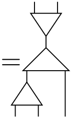


Coassociativité

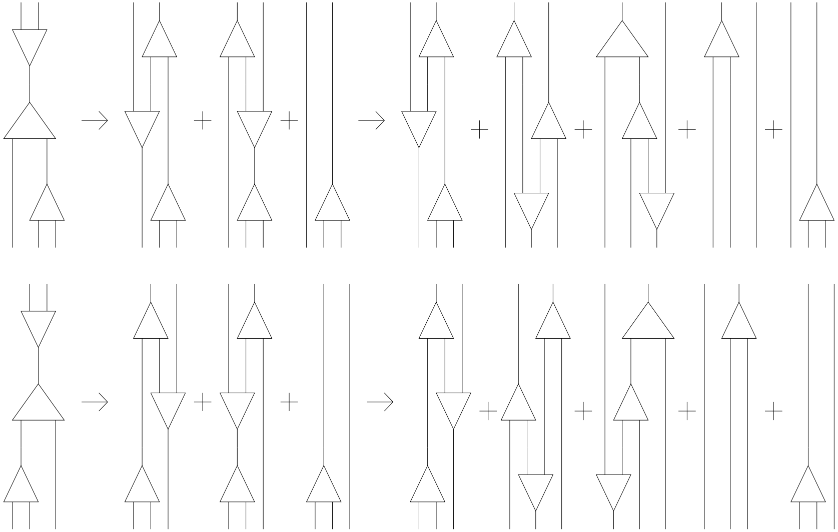


Structure de la preuve

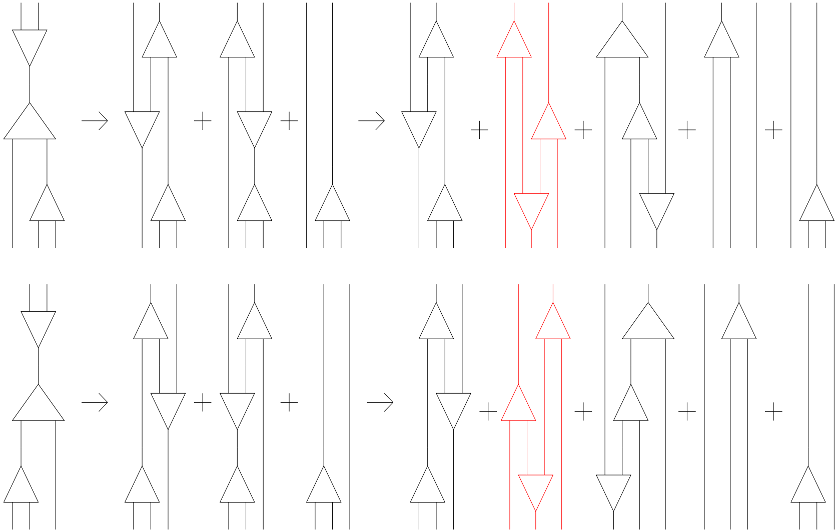
$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & \phi \arrow[dl] \arrow[ddrr, dashed, "?"] & & \\
 & {} \arrow[dl] & & & \\
\psi \arrow[ddrr, dashed] & & & & \phi' \arrow[dl] \\
 & & & {} \arrow[dl] & \\
 & & \psi' & &
\end{tikzcd}
$$

where $\phi =$  and $\phi' =$ 

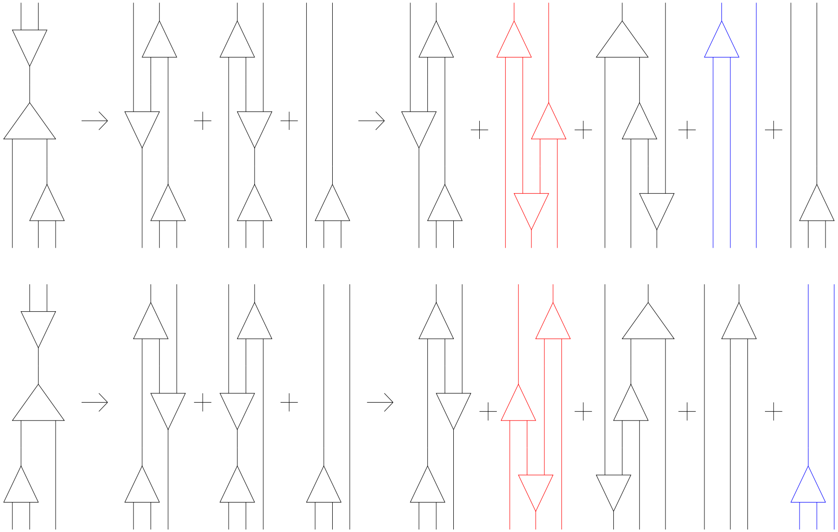
Preuve I



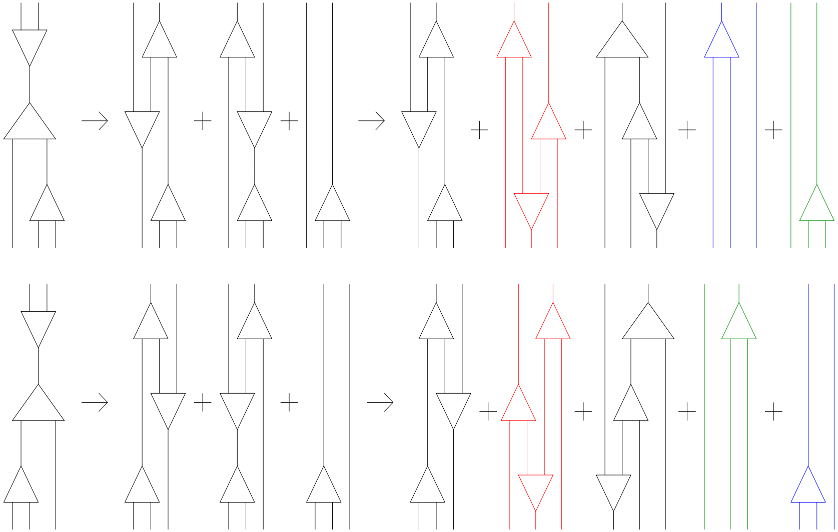
Preuve I



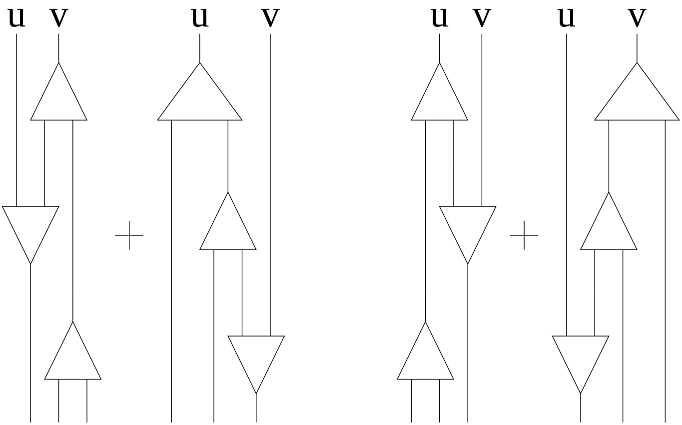
Preuve I



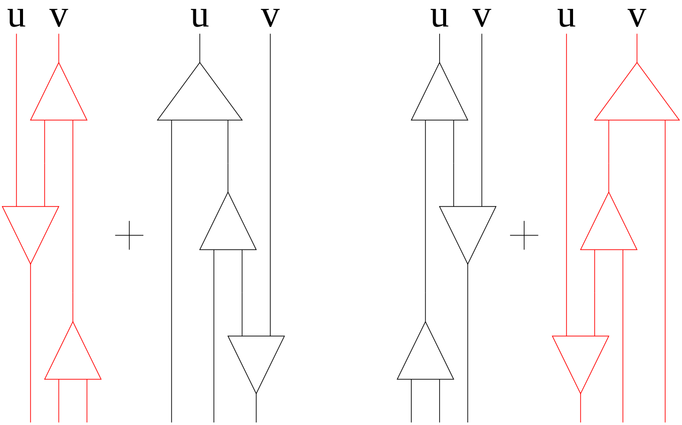
Preuve I



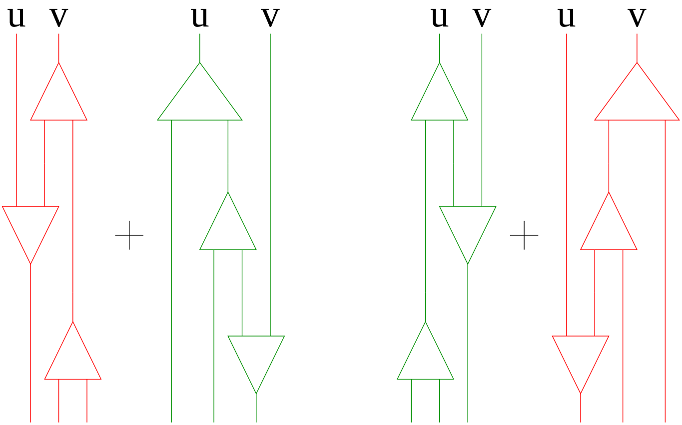
Preuve II



Preuve II



Preuve II



Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A, et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \longrightarrow \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u \cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A, et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u\cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

- $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u\cdot v \\ u,v\neq\varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$
- $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A, et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u\cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

- $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u\cdot v \\ u,v\neq\varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$
- $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Remarque : $\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$

Déconcaténation sur le monoïde libre

L'alphabet A, et le monoïde libre $M = A^*$.

Déconcaténation totale : $\Delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M \otimes \mathbb{Z}M = \mathbb{Z}M^2$, pour $w \in M$:

$$\Delta(w) = \sum_{w=u\cdot v} u \otimes v$$

Déconcaténation primitive $\delta : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M^2$ étendant $\delta : \mathbb{Z}S \to \mathbb{Z}S^2$, pour $w \in M$:

- $\delta(w) = \sum_{\substack{w=u\cdot v \\ u,v\neq\varepsilon}} u \otimes v$, si $w \in S$
- $\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$

Remarque : $\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$

$$\Delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) + \varepsilon \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \varepsilon = -\varepsilon \otimes \varepsilon + 2\varepsilon \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \varepsilon$$

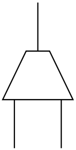
Théorème

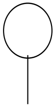
La déconcaténation totale est coassociative.

Nouvelles portes et Nouvelles règles

Portes :

Déconcaténation totale   constante ε

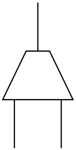




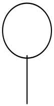
Nouvelles portes et Nouvelles règles

Portes :

Déconcaténation totale

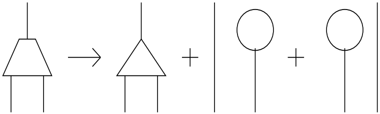


constante ε

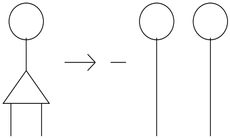


Règles :

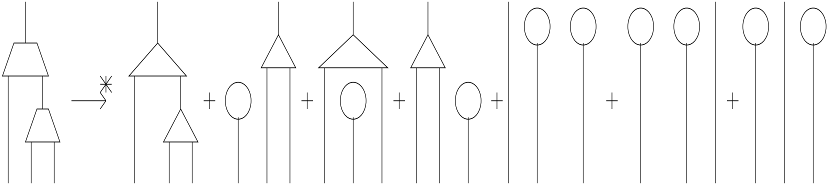
$$\Delta(m) = \delta(m) + m \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes m$$

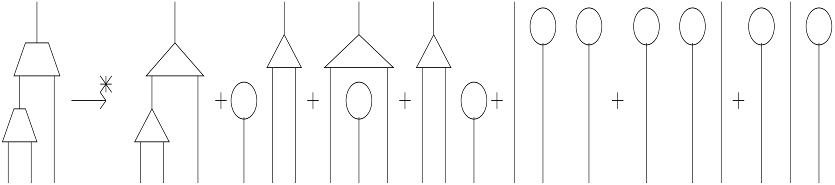


$$\delta(\varepsilon) = -\varepsilon \otimes \varepsilon$$

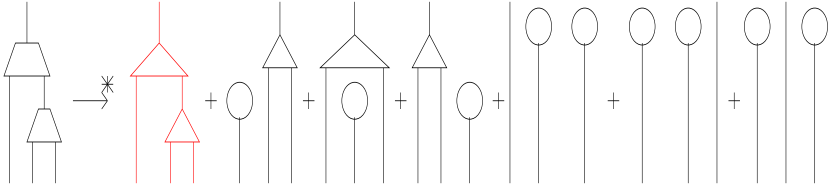


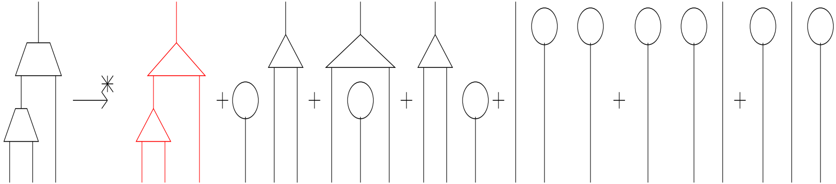
Preuve





Preuve





Shuffle sur le monoïde libre

Shuffle : $\sigma : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M^2$, pour $w = a_1 \cdots a_k$ et de taille k :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} u \otimes v$$

Où I_w est l'ensemble des paires (u, v) de mots de la forme :

- $u = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$
- $v = a_{j_1} \cdots a_{j_q}$ avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$

où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cup \{j_1, \cdots, j_q\} = \{1, \cdots, n\}$ et $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{j_1, \cdots, j_q\} = \emptyset$.

Shuffle sur le monoïde libre

Shuffle : $\sigma : \mathbb{Z}M \to \mathbb{Z}M^2$, pour $w = a_1 \cdots a_k$ et de taille k :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v) \in I_w} u \otimes v$$

Où I_w est l'ensemble des paires (u, v) de mots de la forme :

- $u = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$
- $v = a_{j_1} \cdots a_{j_q}$ avec $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$

où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cup \{j_1, \cdots, j_q\} = \{1, \cdots, n\}$ et $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{j_1, \cdots, j_q\} = \emptyset$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \sigma(abaa) \quad = \quad & ab \otimes aa + 2aba \otimes a + abaa \otimes \varepsilon + 2aa \otimes ba + aaa \otimes b \\ & + aa \otimes ab + 2a \otimes aba + \varepsilon \otimes abaa + 2ba \otimes aa + b \otimes aaa \end{aligned}$$

Théorème

Le shuffle est coassociatif.

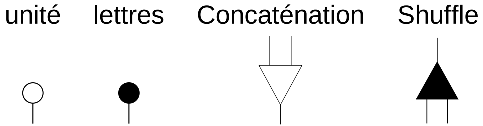
Définition inductive du shuffle

- $\sigma(w \cdot w') = \sum_{\substack{(u,v)\in I_w \\ (u',v')\in I_{w'}}} u \cdot u' \otimes v \cdot v' = \sigma(w) \cdot \sigma(w')$
- $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon$
- $\sigma(a) = \varepsilon \otimes a + a \otimes \varepsilon$

$$(u \otimes v) \cdot (u' \otimes v') = (u \cdot u') \otimes (v \cdot v')$$

Règles et portes

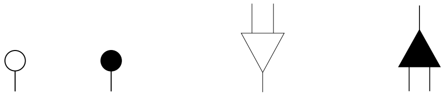
Portes :



Règles et portes

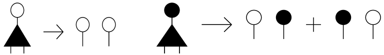
Portes :

unité lettres Concaténation Shuffle

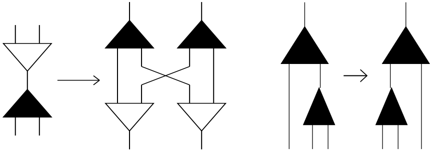


Règles :

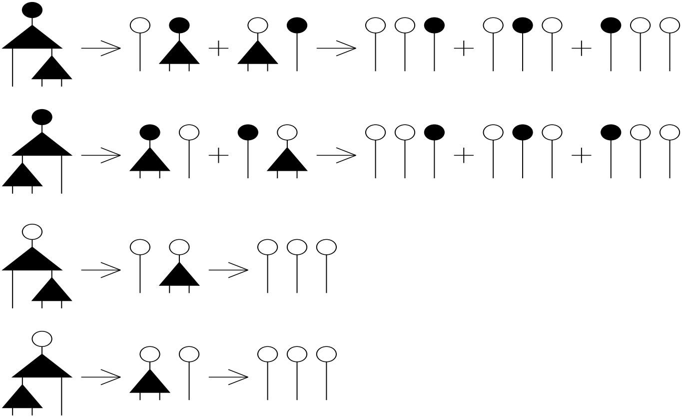
Unité Lettres



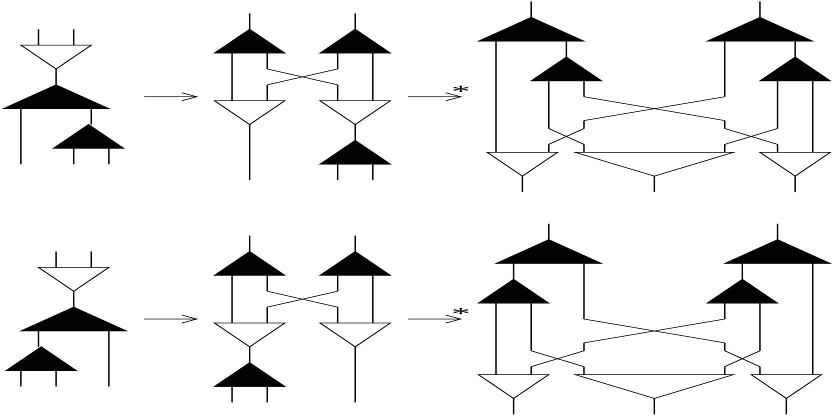
Interaction (Hopf) Coassociativité



Preuve



Preuve



Théorème

Le shuffle est co-commutatif :

Théorème

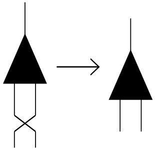
Le shuffle est co-commutatif :

$$\sigma(w) = \sum_{(u,v)\in I_w} v \otimes u$$

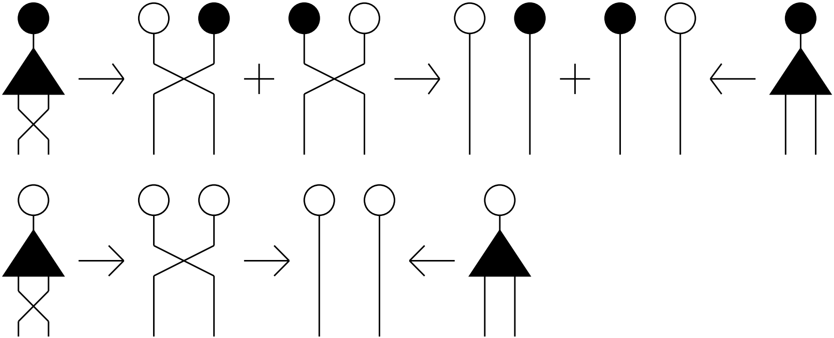
Théorème

Le shuffle est co-commutatif :

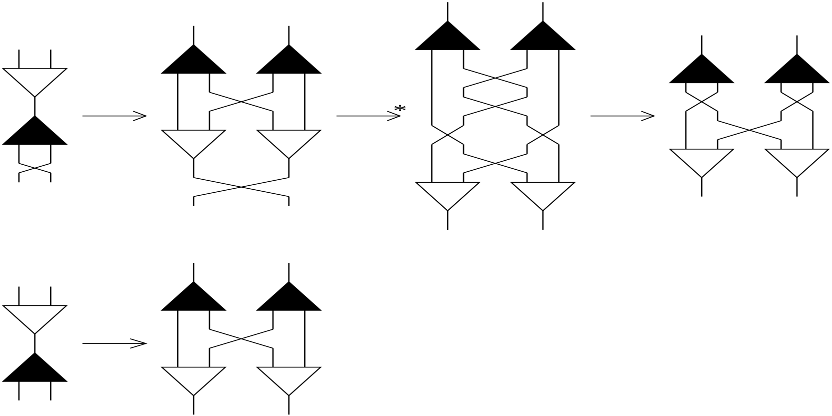
$$\sigma(w) = \sum_{(u,v)\in I_w} v \otimes u$$



Preuve



Preuve



Autres règles