Diagrammes et Σ-diagrammes

Yves Lafont & Pierre Rannou
CNRS - Institut de Mathématiques de Luminy
Université de la Méditerranée (Aix-Marseille 2)

Catégories supérieures, polygraphes et homotopie
Université Paris Diderot
18 juin 2010

PROs

Définition : Un *PRO* est une *catégorie monoïdale stricte* $(C,*)$ telle que :

- les objets de C sont les *entiers naturels* ;
- si p et q sont des entiers naturels, alors $p*q = p+q$.

Un morphisme de C est donc de la forme $f : p \to q$.

Exemples :

- $f : p \to q$ est une *application* de $\{1,\ldots,p\}$ vers $\{1,\ldots,q\}$;
- idem, mais on suppose que $f : p \to q$ est *croissante* ;
- $f : p \to q$ est une *application linéaire* de $\mathbf{K}^p$ vers $\mathbf{K}^q$ (ou encore une *matrice* $p \times q$ *à coefficients dans* $\mathbf{K}$).

Classification des PROs

- cas *basique* : + (union disjointe)

$$f : p \to q \qquad (p = \{1, \ldots, p\} = 1 + \cdots + 1)$$

- cas *classique* : × (produit cartésien)

$$f : \mathbf{B}^p \to \mathbf{B}^q \qquad (\mathbf{B} = \{0, 1\} = 1 + 1,\ \mathbf{B}^p = \mathbf{B} \times \cdots \times \mathbf{B})$$

- cas *linéaire* : ⊕ (somme directe)

$$f : \mathbb{Z}_2^p \to \mathbb{Z}_2^q \qquad (\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\},\ \mathbb{Z}_2^p = \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2)$$

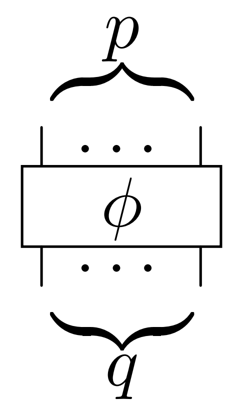
- cas *quantique*: ⊗ (produit tensoriel)

$$f : \mathbb{B}^{\otimes p} \to \mathbb{B}^{\otimes q} \qquad (\mathbb{B} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\ \mathbb{B}^{\otimes p} = \mathbb{B} \otimes \cdots \otimes \mathbb{B})$$

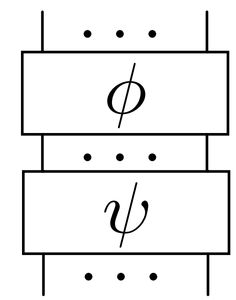
Le ***Tétragramme*** : + × ⊕ ⊗

Diagrammes

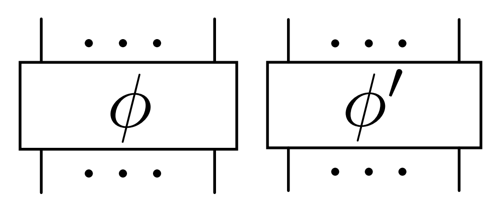
entrées/sorties :



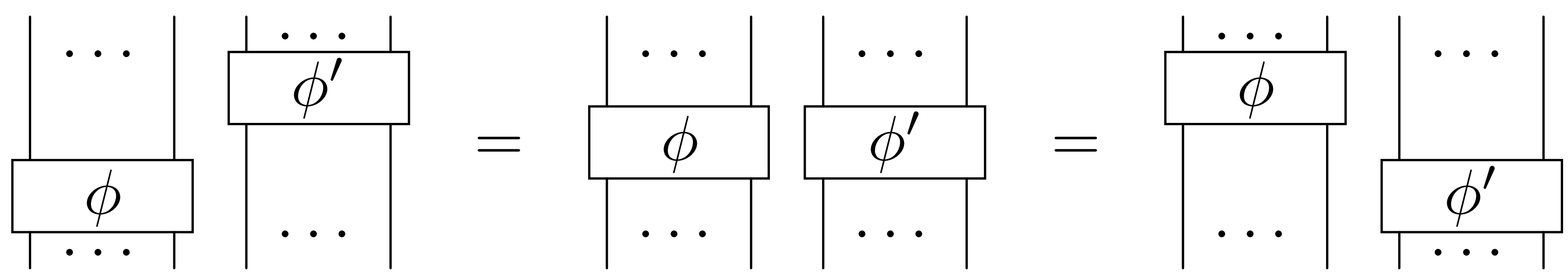
composition *séquentielle* :



composition *parallèle* :

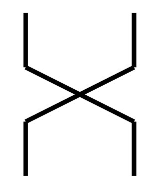


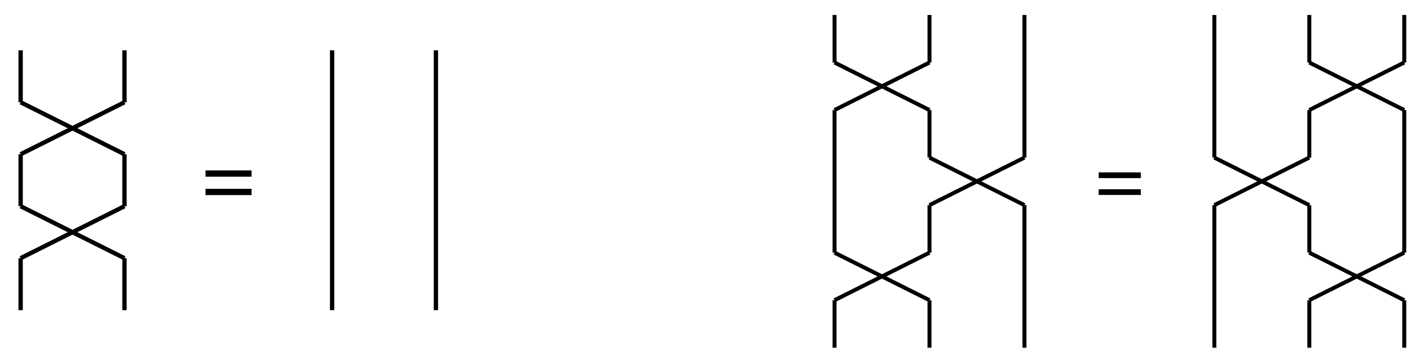
loi d'*échange* :



Remarque : Ce sont les morphismes du *PRO libre*.

Exemple : le PRO $\mathfrak{S}$ des permutations finies

générateur : 

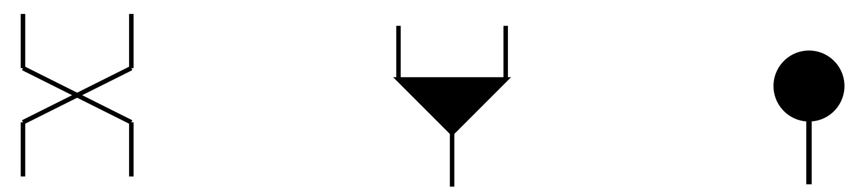
relations : 

Théorème : Cette *présentation par générateurs et relations* définit le PRO des *permutations finies*.

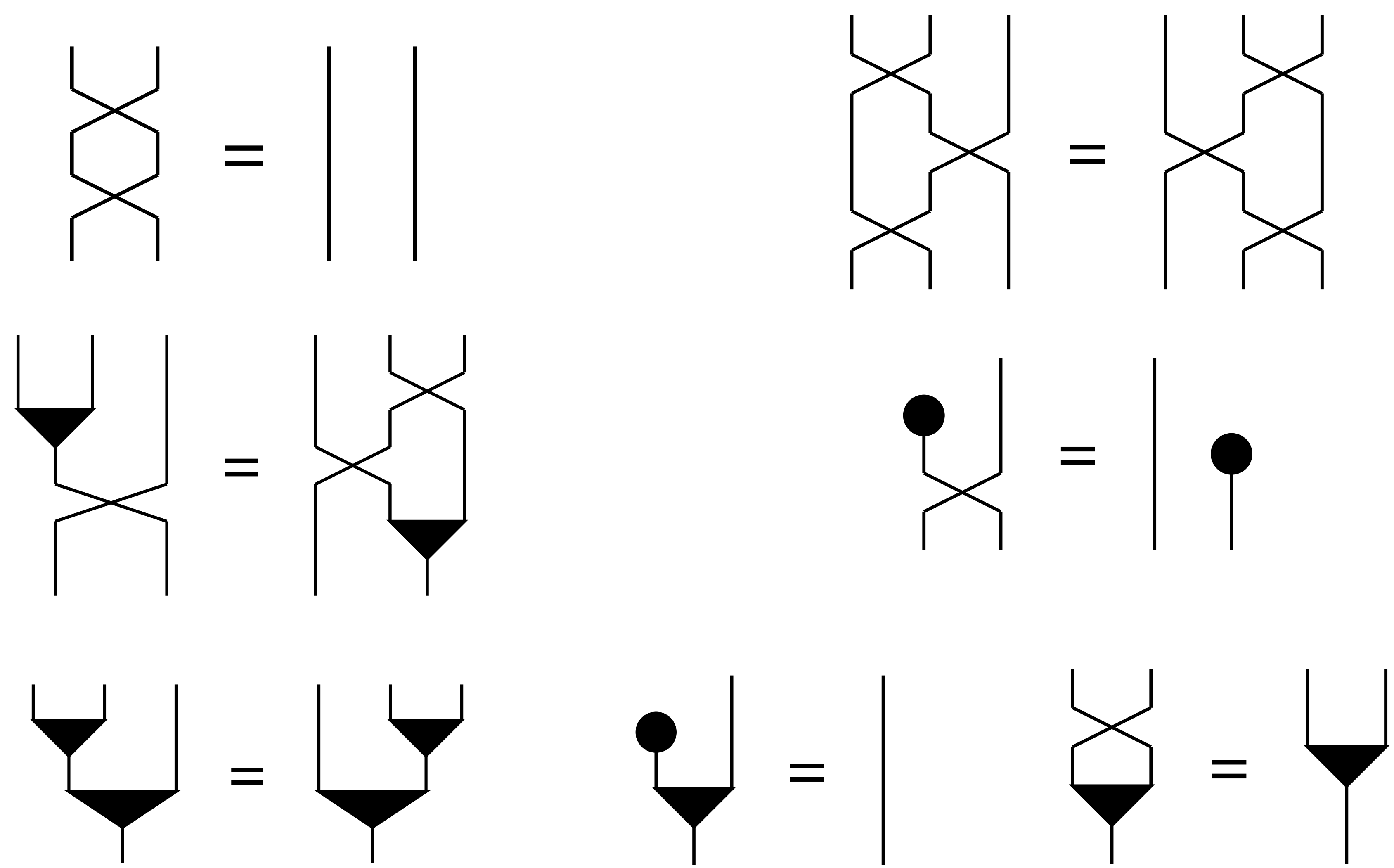
Définition : Un *PROP* est un PRO qui contient $\mathfrak{S}$.

Exemple : le PRO $\mathfrak{F}$ des applications finies

générateurs :

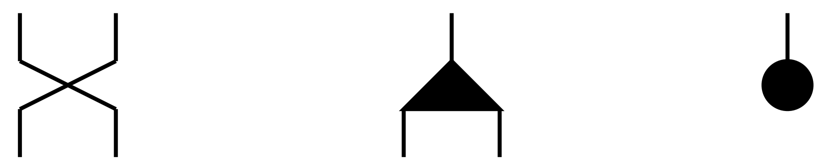


relations :

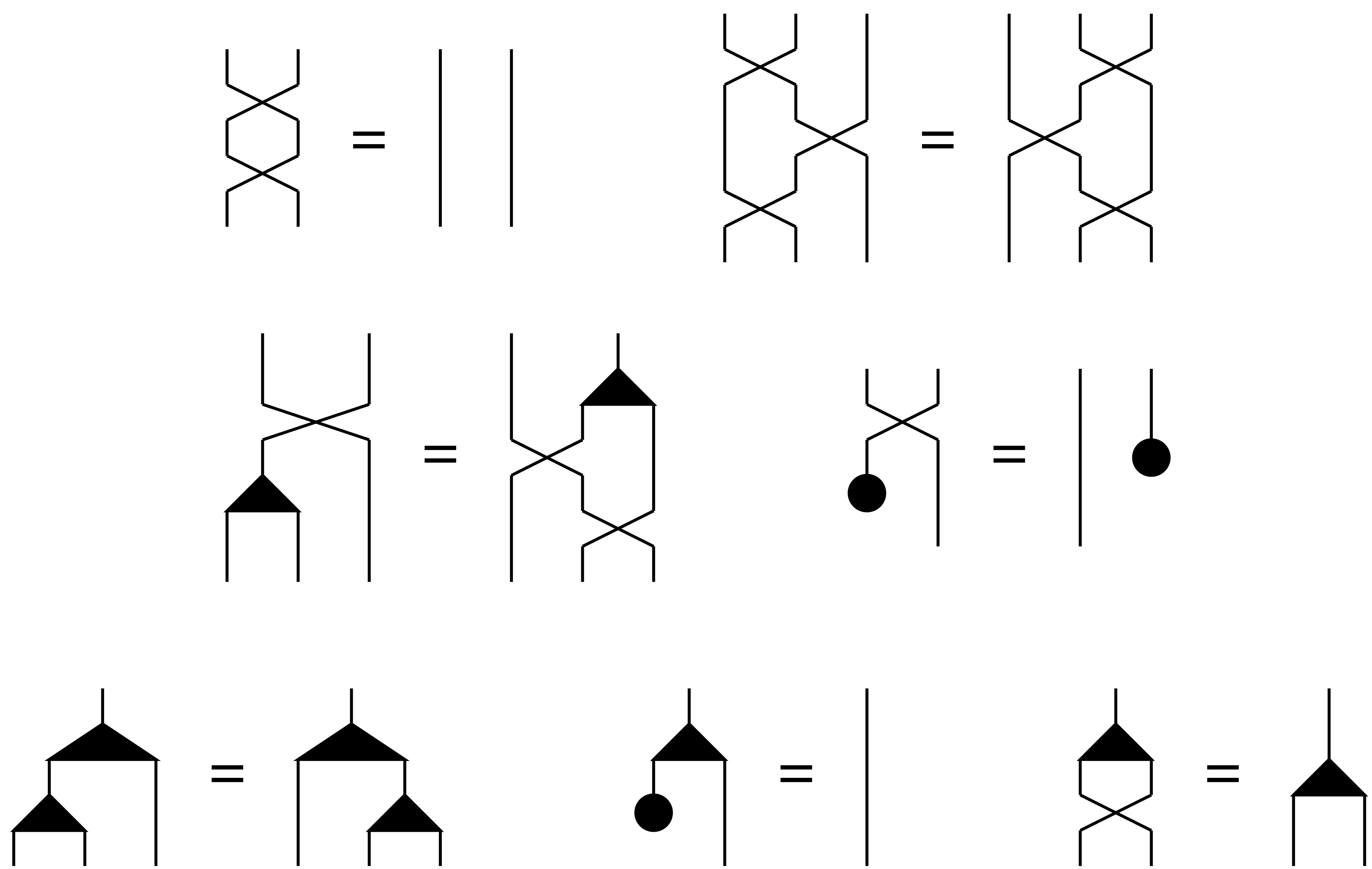


Exemple : le PRO dual $\mathfrak{F}^*$

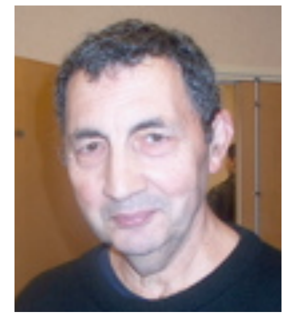
générateurs :



relations :



Termes ou diagrammes?

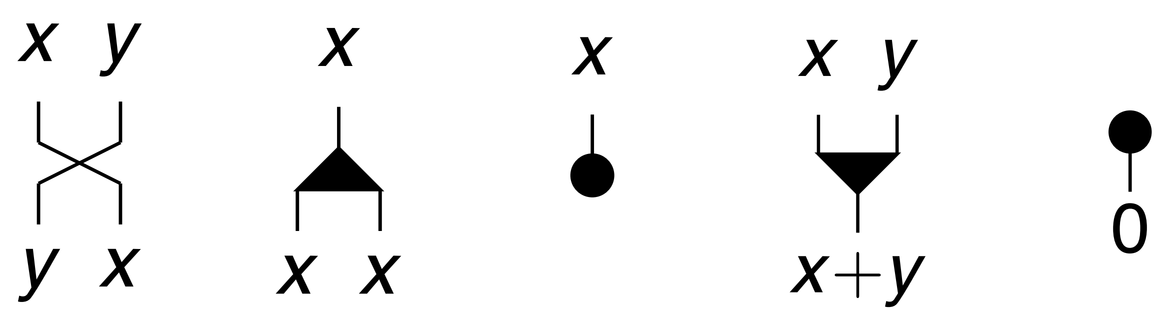


- Une théorie équationelle finie (**termes**) donne une présentation finie (**diagrammes**) [Burroni 91].
- Un système de réécriture convergent fini (**termes**) qui est *linéaire à gauche* donne une présentation convergente finie (**diagrammes**) [Lafont 95].

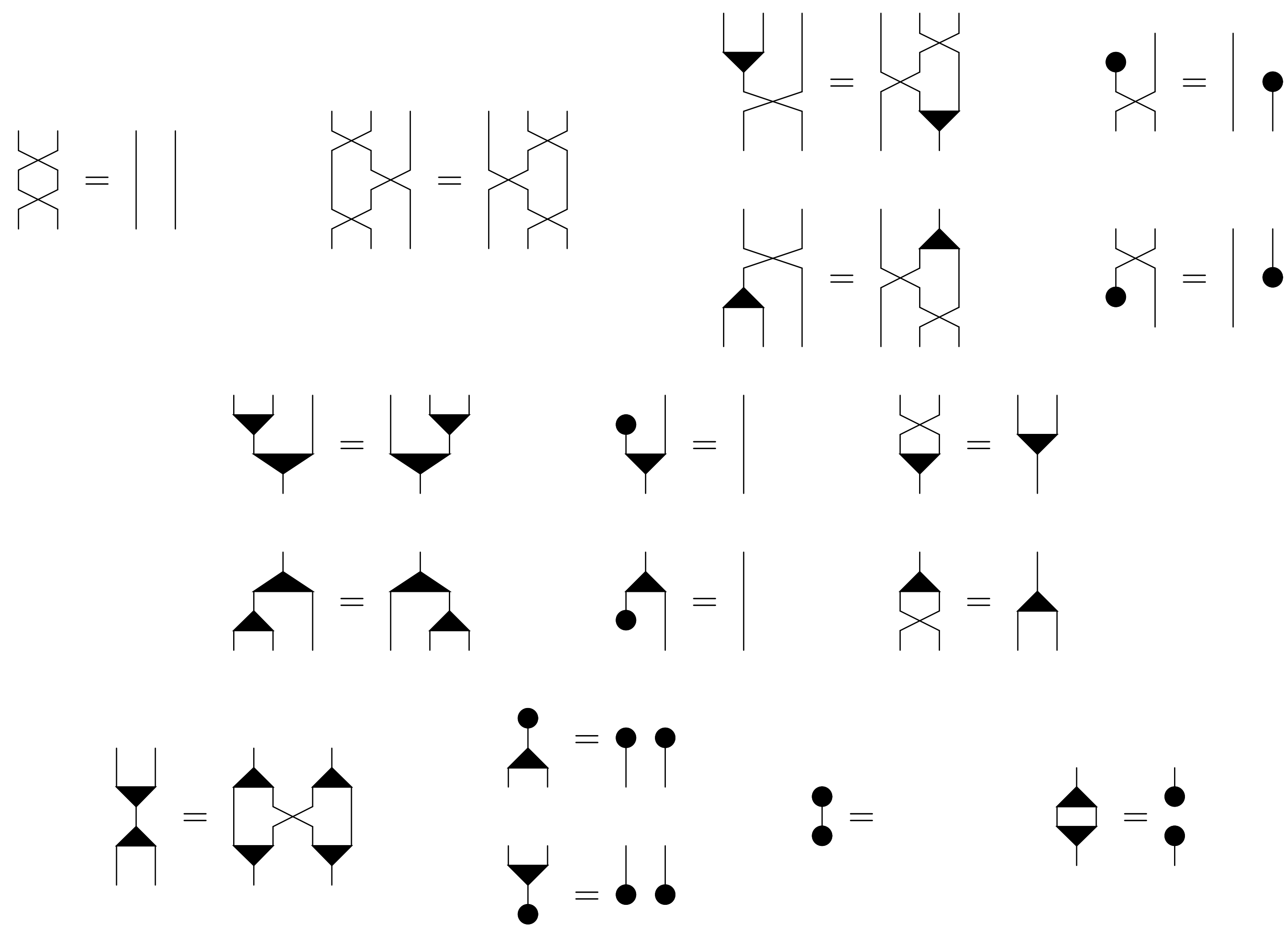
Le cas *non linéaire* est plus délicat (*pics critiques*).

Exemple : le PRO $\mathbf{L}(\mathbb{Z}_2)$ des *applications linéaires modulo 2*

générateurs :

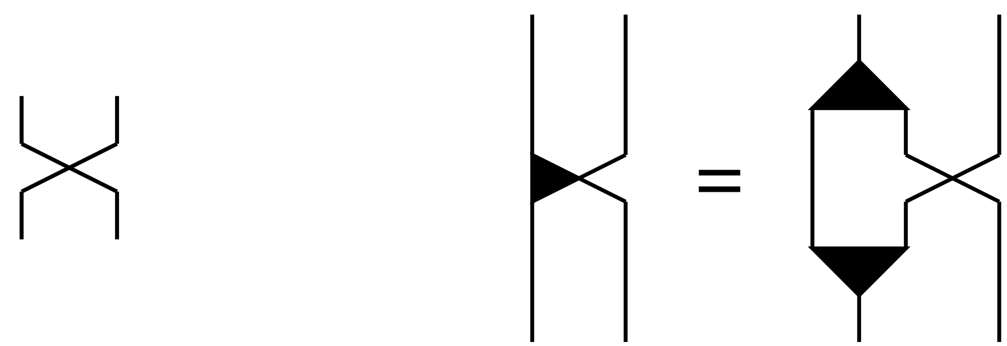


relations :

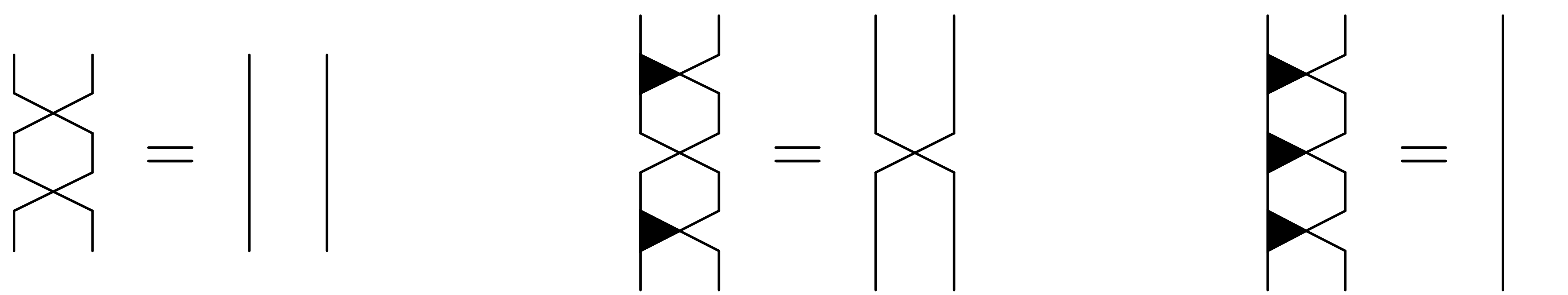


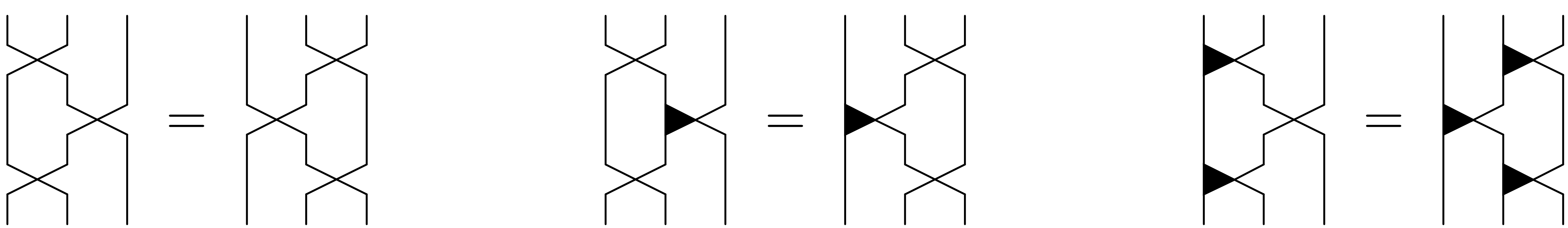
Exemple : le PRO $\mathbf{GL}(\mathbb{Z}_2)$ des *permutations linéaires modulo 2*

générateurs :



relations :





Σ-diagrammes

Définition : Un Σ-*diagramme* $\Phi : p \to q$ est une combinaison linéaire $\sum \lambda_i \varphi_i$ de diagrammes $\varphi_i : p \to q$.

Remarques :

- Les coefficients λ_i sont dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$, …
- Ces Σ-diagrammes forment un PRO.
- On les interprète dans le cas *quantique* (*opérades*).

Analogies :

- *diagrammes de Feynman* ;
- *réseaux d'interaction différentiels*.

Références

- **Albert Burroni**, *Higher dimensional word problems* (TCS, **1993**)
- **Yves Lafont**, *Towards an algebraic theory of Boolean circuits* (JPAA, **2003**)
- **Yves Guiraud**, *Termination Orders for 3-Dimensional Rewriting* (JPAA, **2006**)
- **Yves Lafont** & **Pierre Rannou**, *Diagram rewriting for orthogonal matrices* (RTA **2008**)
- **Yves Lafont**, *Diagram rewriting and operads* (SMF, à paraître)
- **Pierre Rannou**, *Properties of co-operations: diagrammatic proofs* (soumis à publication)