Calcul des séquents et déduction naturelle

Yves Lafont

Albi, 1989

"Une certaine tradition voudrait faire de la logique un jeu formel, une succession de règles plus ou moins arbitraires. Le calcul des séquents (comme d'ailleurs la déduction naturelle) montre qu'il n'en est rien ..." [Girard89]. La théorie de la démonstration exprime en effet les symétries profondes de la logique, que souvent, l'imperfection de la syntaxe obscurcit. Les systèmes de calcul des séquents et de déduction naturelle sont particulièrement adaptés à cette étude méta-mathématique, tout en restant très proches de l'intuition "humaine". Ce sont des outils irremplaçables pour aborder les questions de vérification et de synthèse "automatiques" des preuves, et leur champ d'application s'étend aux langages informatiques, puisque fondamentalement, programmation et démonstration sont de même nature.

La logique mathématique a pour objet le langage mathématique, mais en tant que branche des mathématiques, elle a aussi son propre langage. Pour distinguer le *langage objet* du *métalangage*, on fait appel à des symboles ésotériques: $\wedge$ pour la conjonction, $\Rightarrow$ pour l'implication, $\vee$ pour la disjonction, $\perp$ pour l'absurde, $\forall x.$ pour la quantification universelle et $\exists x.$ pour la quantification existentielle. Ces symboles sont évidemment à proscrire du métalangage!

La validité d'un énoncé mathématique dépend de son contexte, c'est à dire de toutes les hypothèses en cours. Dans le métalangage, on note $\Gamma \vdash B$ le couple (Γ, B) où Γ est une suite d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$ et B prétend être conséquence des hypothèses $A_1, \ldots, A_n$. Evidemment, on pourrait remplacer ce *séquent* par un seul énoncé du langage objet, à savoir $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$. De fait, le connecteur "$\Rightarrow$" *internalise* la notion de conséquence, c'est à dire le "$\vdash$" du métalangage, de même que "$\wedge$" internalise la juxtaposition des hypothèses, mais comme les règles de démonstration feront explicitement référence aux hypothèses $A_1, \ldots, A_n$ et à la conséquence B, il vaut mieux leur donner un statut officiel!

1 Calcul des séquents

Nous présentons d'abord le *calcul des séquents intuitionniste* de Gentzen dans le cas propositionnel. Il s'agit de formaliser les démonstrations à l'aide d'un système de *règles d'inférences* sur les séquents.

1.1 Les règles

La validité d'un séquent $\Gamma \vdash A$ est insensible à certaines manipulations du contexte Γ, comme la permutation des hypothèses:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C} \quad (\text{règle d'}\textit{échange})$$

De même, rien n'interdit les hypothèses partagées ou superflues:

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \quad \text{(règle de } \textit{contraction}\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \quad \text{(règle d'}\textit{affaiblissement}\text{)}$$

Ces trois règles sont dites *structurelles*: elles ne font que traduire la notion même de *contexte* dans une preuve mathématique. Comme il ne s'agit pas d'étapes fondamentales du raisonnement, il est commode de les regrouper. Par exemple

$$\frac{\Gamma, \Gamma \vdash A}{\overline{\Gamma \vdash A}}$$

abrège une succession d'échanges et de contractions.

La notion de *conséquence* se traduit par le *lien axiome*

$$\frac{}{A \vdash A}$$

et la règle de *coupure*

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\mathcal{C}$$

dans laquelle A (l'*énoncé de coupure*) joue le rôle de lemme.

On pourrait tout aussi bien prendre comme lien axiome

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

et comme règle de coupure

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,\mathcal{C}'$$

puisque les règles structurelles permettent de passer aisément d'une variante à l'autre:

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{\overline{\Gamma, A \vdash A}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \Gamma \vdash B}\,\mathcal{C}}{\overline{\Gamma \vdash B}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A}{\overline{\Gamma, \Delta \vdash A}} \quad \dfrac{\Delta, A \vdash B}{\overline{\Gamma, \Delta, A \vdash B}}}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\mathcal{C}'$$

Le sens d'un connecteur logique, par exemple "$\wedge$", est déterminé par son comportement en hypothèse (comment utiliser $A \wedge B$), et en conséquence (comment démontrer $A \wedge B$).

En l'occurrence, pour démontrer $A \wedge B$, il suffit de démontrer séparément A et B, d'où la règle *logique à droite*:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\,\wedge\mathcal{D}$$

En hypothèse, $A \wedge B$ est plus fort que A et B, d'où les règles *logiques à gauche*:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,\wedge^1\mathcal{G} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,\wedge^2\mathcal{G}$$

Pour démontrer $A \Rightarrow B$, il suffit de démontrer B en supposant A:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\,{\Rightarrow}\mathcal{D}$$

On utilise l'hypothèse $A \Rightarrow B$ en démontrant A d'une part et en utilisant B comme hypothèse d'autre part:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash C}\,{\Rightarrow}\mathcal{G}$$

Exercice 1 *Donner des variantes pour les règles* $\wedge\mathcal{D}$, $\wedge^1\mathcal{G}$, $\wedge^2\mathcal{G}$ *et* ${\Rightarrow}\mathcal{G}$.

Pour la disjonction, il y a deux règles à droite évidentes:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee^1\mathcal{D} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee^2\mathcal{D}$$

Le raisonnement par cas se traduit par une règle à gauche:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\,\vee\mathcal{G}$$

Quand à l'absurde, qui permet d'exprimer la négation $A \Rightarrow \bot$, il n'a droit qu'à une règle à gauche:

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash C}\,\bot\mathcal{G}$$

1.2 Les démonstrations

Une *démonstration* est un arbre construit uniquement à l'aide des règles du calcul. Par exemple,

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B \vdash B$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow C \vdash C$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{D}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow C \vdash B \wedge C$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, A \vdash B \wedge C$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{D}$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \wedge C \vdash B \wedge C$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$D \vdash D$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$B \wedge C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash D$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$(B \wedge C) \Rightarrow D, B \wedge C \vdash D$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, (B \wedge C) \Rightarrow D, A \Rightarrow (B \wedge C) \vdash D$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$(B \wedge C) \Rightarrow D, A \Rightarrow (B \wedge C), A \vdash D$}
\RightLabel{${\Rightarrow}\mathcal{D}$}
\UnaryInfC{$(B \wedge C) \Rightarrow D, A \Rightarrow (B \wedge C) \vdash A \Rightarrow D$}
\RightLabel{$\mathcal{C}$}
\BinaryInfC{$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$}
\end{prooftree}
$$

est une démonstration du séquent $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$.

Il est clair que tout séquent démontrable est valide classiquement — c'est à dire avec des tables de vérité — mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi nous verrons que le *principe du tiers exclus* $A \vee (A \Rightarrow \perp)$ n'admet pas de démonstration: ce calcul est *intuitionniste.*

Les règles logiques ont une forme remarquable: il y a une seule occurrence de connecteur, qui se trouve dans le séquent conclusion, et tous les énoncés des séquents prémisses se retrouvent dans la conclusion. En fait, dans la démonstration de $\Gamma \vdash B$, la seule règle qui puisse faire intervenir un énoncé étranger à ce séquent est la coupure, autrement dit:

Proposition 1 *(propriété de la sous-formule)*
Dans une démonstration sans coupure d'un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B$, il n'y a que des sous-formules de $A_1, \ldots, A_n$ et B.

La notion de sous-formule se définit par récurrence:

- A est une sous-formule de A,
- les sous-formules de A et celles de B sont aussi des sous-formules de $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$ et $A \vee B$.

Proposition 2 *(dernière règle)*
Une démonstration sans coupure d'un séquent sans hypothèse $\vdash A$ se termine nécessairement par une règle logique à droite.

En effet, comme il n'y a pas d'hypothèse, la dernière règle ne saurait être structurelle, ni un lien axiome, ni une règle logique à gauche.

En fait, on pourra toujours se ramener à des démonstrations sans coupure, grâce au théorème suivant:

Théorème 1 *(Hauptsatz de Gentzen)*
La règle de coupure est "redondante": tout séquent démontrable possède une démonstration sans coupure.

Par exemple, le séquent $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$ admet une démonstration sans coupure:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B \vdash B$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$C \vdash C$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow C \vdash C$}
\RightLabel{$\wedge\mathcal{D}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B, A, A \Rightarrow C \vdash B \wedge C$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$A, A \Rightarrow B, A \Rightarrow C \vdash B \wedge C$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$D \vdash D$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathcal{G}$}
\BinaryInfC{$A, A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash D$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D, A \vdash D$}
\RightLabel{$\Rightarrow\mathcal{D}$}
\UnaryInfC{$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$}
\end{prooftree}
$$

Le théorème de Gentzen est effectif: il donne un algorithme pour transformer une démonstration quelconque en une démonstration *normale*, c'est-à-dire sans coupure, même si cette *normalisation* peut être catastrophique en complexité (le caractère redondant de la coupure est donc assez théorique). La preuve de ce théorème est un peu délicate (voir annexe D), mais on peut déjà considérer ses conséquences:

Corollaire 1 *Si un séquent est démontrable, on peut le démontrer en utilisant uniquement des sous-formules des hypothèses et de la conclusion. En particulier, la propriété d'être démontrable est décidable.*

En effet, pour chaque énoncé, il n'y a qu'un nombre *fini* de sous-formules, et en modifiant légèrement les règles, on peut travailler uniquement avec des séquents sans répétition d'hypothèse, si bien que l'arbre de recherche est fini. Ceci dit, le problème est tout de même *PSpace*-complet!

Nous dirons qu'un énoncé A est démontrable si le séquent $\vdash A$ l'est. De la proposition 2, on déduit:

Corollaire 2 *(cohérence et propriété de la disjonction)*

i) $\perp$ *n'est pas démontrable.*

ii) Si $A \vee B$ *est démontrable,* A *ou* B *l'est.*

Pour i), le Hauptsatz n'est certes pas nécessaire puisque $\perp$ n'est pas valide classiquement. Pour ii), il existe également un argument direct (dû à Kleene):

Par récurrence sur l'énoncé A, on pose $\Vdash A$ lorsque A est démontrable et l'une des conditions suivantes est satisfaite:

- A est de la forme $B \wedge C$, $\Vdash B$ et $\Vdash C$.
- A est de la forme $B \Rightarrow C$, et si $\Vdash B$ alors $\Vdash C$.
- A est de la forme $B \vee C$, et $\Vdash B$ ou $\Vdash C$.

Exercice 2 *Si* $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ *est démontrable (éventuellement avec coupures) et* $\Vdash A_i$ *pour* $i = 1, \ldots, n$*, alors* $\Vdash B$.

En particulier, si $A \vee B$ est démontrable, alors $\Vdash A \vee B$, ce qui entraîne par définition que A ou B est démontrable.

Corollaire 3 *Si* A *est un énoncé atomique,* $A \vee (A \Rightarrow \perp)$ *n'est pas démontrable.*

En effet, par ii), on aurait A ou $A \Rightarrow \perp$ démontrable, mais aucun d'eux n'est valide classiquement.

Exercice 3 *L'axiome de Pierce* $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ *est valide classiquement, mais pas démontrable.*

Exercice 4 *Entraînez-vous à démontrer (sans coupure) vos tautologies préférées, par exemple:*

- $A \Rightarrow A$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ *et* $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$,
- $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$ *et* $(A \wedge B) \Rightarrow A$,
- $A \Rightarrow (A \vee B)$, $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$ *et* $\perp \Rightarrow C$,
- $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ *et réciproquement.*

Notez qu'il est plus facile de les construire de bas en haut!

2 Déduction naturelle

Le calcul des séquents capture mieux la notion de *prouvabilité* que celle de *preuve*: en manipulant des séquents explicites, les règles ne font souvent que recopier les énoncés du contexte. Le formalisme de la déduction naturelle remédie à ce défaut, en représentant les preuves comme des arbres d'énoncés — et non plus de séquents[1] — avec des feuilles comme hypothèses:

$$\begin{array}{c} A_1 \ldots A_n \\ \backslash \quad / \\ B \end{array}$$

Il n'y a pas de règle structurelle explicite, mais il est permis d'utiliser les hypothèses autant de fois que nécessaire (éventuellement aucune).

2.1 Les règles

Il n'y a que deux sortes de règles, les *introductions* et les *éliminations*, qui correspondent plus ou moins aux règles logiques à droite et à gauche du calcul des séquents.

La conjonction ne pose aucun problème:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\wedge B}\wedge\mathcal{I} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\wedge B\end{array}}{A}\wedge^1\mathcal{E} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\wedge B\end{array}}{B}\wedge^2\mathcal{E}$$

ni l'élimination de l'implication:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\Rightarrow B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad\qquad\qquad \text{(modus ponens)}$$

mais son introduction nécessite une *règle globale*:

$$\dfrac{\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad /\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}$$

$[A]$ signifie que A n'est plus considéré comme une hypothèse. On a le droit de *décharger* en une fois plusieurs occurrences de A, éventuellement aucune. En toute rigueur, il faudrait pour chaque hypothèse déchargée un pointeur vers la règle $\Rightarrow\mathcal{I}$ correspondante, si bien que le côté arborescent des déductions est un peu illusoire.

Pour la disjonction, les introductions sont évidentes:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee^1\mathcal{I} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\vee B}\vee^2\mathcal{I}$$

[1]Attention! Il est possible d'exprimer les règles de déduction naturelle avec des séquents (voir annexe A), d'où une confusion fréquente (et facheuse).

et c'est l'élimination qui nécessite une règle globale:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\ /\\ A\vee B\end{array}\qquad \begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}\qquad \begin{array}{c}..[B]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}}{C}\,\vee\mathcal{E} \qquad\qquad \text{(raisonnement par cas)}$$

Notez l'apparition d'un C étranger à l'énoncé $A \vee B$ qui contient le connecteur éliminé. On retrouve cette singularité dans l'élimination de l'absurde:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\ /\\ \perp\end{array}}{C}\,\perp\mathcal{E}$$

2.2 Les déductions

Si une déduction $\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\ /\\ A\end{array}$ n'a pour hypothèses que des membres de la liste Γ, on dira qu'elle prouve le séquent $\Gamma \vdash A$.

Exercice 5 *La déduction naturelle est équivalente au calcul des séquents intuitionniste: pour toute déduction de $\Gamma \vdash A$, il existe une démonstration du calcul des séquents, et réciproquement.*

Par exemple, en traduisant la démonstration (avec coupure) du séquent

$$A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$$

on obtient la déduction suivante:

$$\dfrac{(B\wedge C)\Rightarrow D \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow B \quad [A]}{B}\Rightarrow\mathcal{E} \qquad \dfrac{A\Rightarrow C \quad [A]}{C}\Rightarrow\mathcal{E}}{B\wedge C}\wedge\mathcal{I}}{A\Rightarrow(B\wedge C)}\Rightarrow\mathcal{I} \qquad [A]}{B\wedge C}\Rightarrow\mathcal{E}}{\dfrac{D}{A\Rightarrow D}\Rightarrow\mathcal{I}}\Rightarrow\mathcal{E}$$

Les deux occurrences de A en haut qui sont déchargées le sont par la règle qui introduit $A \Rightarrow (B \wedge C)$ (pas celle qui introduit $A \Rightarrow D$).

En déduction naturelle, il n'y a pas de règle de coupure: c'est à cause des éliminations que les déductions ne vérifient pas — en général — la propriété de la sous-formule, mais ces règles sont loin d'être redondantes.

Si on se limite aux connecteurs $\wedge$ et $\Rightarrow$, le seul moyen de faire apparaître un énoncé étranger aux hypothèses et à la conclusion, c'est d'éliminer un connecteur qui vient d'être introduit:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\wedge B}\,\wedge\mathcal{I}}{A}\,\wedge^1\mathcal{E}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\wedge B}\,\wedge\mathcal{I}}{B}\,\wedge^2\mathcal{E}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad/\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}}{B}\Rightarrow\mathcal{E}$$

Par analogie avec le calcul des séquents, ces configurations sont appelées *coupures*, et de fait, on retrouve les résultats fondamentaux (en se limitant pour l'instant aux connecteurs $\wedge$ et $\Rightarrow$):

Exercice 6 *Une déduction sans coupure ne contient que des sous-formules de ses hypothèses et de sa conclusion.*

Théorème 2 *(Prawitz)*
Si le séquent $\Gamma \vdash A$ a une déduction, il en a une sans coupure.

Ce théorème est essentiellement équivalent à celui de Gentzen, et correspond à un processus de réduction particulièrement simple. Chaque occurrence de coupure dans la déduction est réduite selon un des schémas suivants:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\wedge B}\,\wedge\mathcal{I}}{A}\,\wedge^1\mathcal{E}\quad\to\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}}{A\wedge B}\,\wedge\mathcal{I}}{B}\,\wedge^2\mathcal{E}\quad\to\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ B\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad/\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}}{B}\Rightarrow\mathcal{E}\quad\to\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ ..A..\\ \backslash\quad/\\ B\end{array}$$

et la réduction se poursuit jusqu'à la disparition complète des coupures.

Les réductions pour $\wedge$ sont excellentes, car elles font décroître la taille de la déduction. Par contre, la réduction pour $\Rightarrow$ peut entraîner des duplications lorsqu'une hypothèse a été déchargée plusieurs fois:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}..[A]..[A]..\\ \backslash\qquad/\\ B\end{array}}{A\Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\;/\\ A\end{array}}{B}\Rightarrow\mathcal{E}\quad\to\quad\begin{array}{c}\cdots\;\;\cdots\\ \backslash\,/\;\backslash\,/\\ ..A..A..\\ \backslash\qquad/\\ B\end{array}$$

si bien que la *terminaison* de la réduction n'est pas immédiate: c'est le point essentiel du théorème 2.

Exercice 7 *Réduire la déduction de $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C, (B \wedge C) \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D$ ci-dessus.*

Lorsque qu'une hypothèse A est répétée dans un contexte Γ, il y a fondamentalement plusieurs déductions du séquent $\Gamma \vdash A$. Pour les distinguer, on peut associer un nom à chaque hypothèse:

$$x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$$

On introduit alors un système de notation pour les déductions:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ t:A\end{array}\quad\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ u:B\end{array}}{(t,u):A\wedge B}\wedge\mathcal{I}\qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ t:A\wedge B\end{array}}{\pi^1 t:A}\wedge^1\mathcal{E}\qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ t:A\wedge B\end{array}}{\pi^2 t:B}\wedge^2\mathcal{E}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}..[x:A]..\\ \backslash\quad /\\ t:B\end{array}}{\lambda x.\, t:A\Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{I}\qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ t:A\Rightarrow B\end{array}\quad\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ u:A\end{array}}{t\,u:B}\Rightarrow\mathcal{E}$$

L'introduction de $\Rightarrow$ décharge toutes les occurrences de l'hypothèse A qui portent le nom x (et qui ne sont pas déjà déchargées).

Les règles de réduction s'écrivent alors:

$$\pi^1(t,u) \to t \qquad\qquad \pi^2(t,u) \to u \qquad\qquad \lambda x.\, t\, u \to t[u/x]$$

et le théorème 2 est un résultat de normalisation du *λ-calcul typé avec paires.*

En déduction naturelle, on a aussi l'*unicité de la forme normale*, qui découle d'une propriété de confluence. Ce n'est pas le cas en calcul des séquents, où l'ordre d'application des règles est trop arbitraire (voir exercice 14).

Finalement, tous les résultats précédents s'étendent aux connecteurs $\vee$ et $\perp$, avec les coupures suivantes (il n'y a pas de coupure pour $\perp$, faute de règle d'introduction):

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee^1\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}\quad\begin{array}{c}..[B]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}}{C}\vee\mathcal{E}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ B\end{array}}{A\vee B}\vee^2\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}\quad\begin{array}{c}..[B]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}}{C}\vee\mathcal{E}$$

La première, par exemple, se réduit ainsi:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee^1\mathcal{I}\quad\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}\quad\begin{array}{c}..[B]..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}}{C}\vee\mathcal{E}\quad\to\quad\begin{array}{c}\ldots\\ \backslash\ /\\ ..A..\\ \backslash\quad /\\ C\end{array}$$

Toutefois, vu la forme particulière des règles d'élimination (avec l'énoncé étranger C), il faut également considérer comme coupures les configurations suivantes:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\ /\\ A\vee B\end{array}\qquad\begin{array}{c}..[A]..\\ \backslash\ \ /\\ C\end{array}\qquad\begin{array}{c}..[B]..\\ \backslash\ \ /\\ C\end{array}}{C}\,\vee\mathcal{E}\qquad\cdots}{C'}\,*\mathcal{E}\qquad\qquad\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\cdots\\ \backslash\ /\\ \bot\end{array}}{C}\,\bot\mathcal{E}\qquad\cdots}{C'}\,*\mathcal{E}$$

où $*$ est le connecteur principal de C (c'est à dire $\wedge$ si C est de la forme $D \wedge E$, *etc.*).

Exercice 8 *Explicitez les 10 configurations particulières et proposez une réduction dans chaque cas. Ces coupures sont dites commutatives (pourquoi?).*

Exercice 9 *Etendre la propriété de la sous-formule à $\vee$ et $\bot$.*

On peut aussi étendre la notation des déductions en un λ-calcul typé avec *constructeurs* et *appel par cas*.

3 La correspondance de Curry-Howard

Que signifie au fond le *théorème d'élimination des coupures*?

D'un point de vue *statique*, c'est un résultat de complétude: tout séquent valide (dans la logique considérée) est démontrable sans coupure. On peut ainsi restreindre l'arbre de recherche des preuves, ce qui est précieux en démonstration interactive ou automatique (voir par exemple [Gallier86]). De plus, en considérant les *règles de réduction*[2] comme des *équations*, on introduit une sorte d'algèbre des preuves, la *sémantique dénotationnelle*, qui permet d'isoler certaines propriétés intentionnelles[3] des algorithmes.

D'un point de vue *dynamique*, c'est un procédé de transformation qui rend les preuves plus "élémentaires", mais pas toujours plus courtes. En interprétant les preuves comme des programmes (on a déjà vu la correspondance entre la déduction naturelle et le λ-calcul) on obtient une assez bonne description du mécanisme d'évaluation des programmes, c'est-à-dire de la *sémantique opérationnelle*, qui certes, n'a pas encore acquis la solidité mathématique de son homologue dénotationnelle.

En conclusion, la correspondance dite de Curry-Howard [Howard80] entre preuves et programmes peut s'exprimer ainsi:

logique	informatique
énoncé	type
conjonction	produit cartésien
disjonction	somme disjointe
implication	type fonctionnel
hypothèse	variable
preuve	programme
normalisation	exécution

Toutes ces questions sont très bien développées dans "Proofs and Types" [Girard89].

[2] Voir la section 2.2 pour la déduction naturelle, et l'annexe D pour le calcul des séquents.

[3] On qualifie ainsi toute propriété d'un algorithme e qui n'est pas *extensionnelle*, c'est à dire déterminée par la seule fonction $x \mapsto e(x)$. Par exemple, la distinction entre *ou parallèle* et *ou séquentiel* est de caractère intentionnel. Certaines propriétés intentionnelles, comme la *stabilité*, la *séquentialité* et le caractère *strict* sont bien "capturées" par la sémantique dénotationnelle, mais d'autres lui échappent, comme la *complexité* qui est une notion fondamentalement dynamique.

Références

[vanHeijenoort67] J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel, A source book in mathematical logic, 1879–1931* (Harvard University Press, 1967).

[Gallier86] J. Gallier, *Logic for Computer Science* (Harper & Row, 1986).

[Gentzen69] *The collected Papers of Gerhard Gentzen*, E. Szabo, ed. (North-Holland, 1969).

[Girard72] J.Y. Girard, Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures dans l'arithmétique d'ordre supérieur, Thèse de doctorat d'état (Université Paris VII, 1972).

[Girard87] J.Y. Girard, *Proof Theory and Logical Complexity* (Bibliopolis, 1987).

[Girard89] J.Y. Girard, Y. Lafont, P. Taylor, *Proofs and Types*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science (Cambridge University Press, 1989).

[Howard80] W.A. Howard, The formulae-as-types notion of construction, in: Hindley & Seldin eds., *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda-calculus and Formalism* (Academic Press, 1980) 479-490.

[MartinLoef84] P. Martin-Löf, *Intuitionistic Type theory*, Studies in Proof Theory (Bibliopolis, 1984).

[Prawitz65] D. Prawitz, *Natural Deduction* (Almqist and Wiskell, 1965).

[Prawitz70] D. Prawitz, Ideas and results in Proof Theory, in: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium* (1970).

Annexes

A Déduction naturelle écrite en séquents

Il ne faut pas confondre le calcul des séquents avec cette présentation de la déduction naturelle[4]:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge^1\mathcal{E} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge^2\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow\mathcal{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow\mathcal{E}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^1\mathcal{I} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee^2\mathcal{I} \quad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee\mathcal{E} \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash C} \bot\mathcal{E}$$

Notez que les introductions sont, aux variantes près, des règles du calcul des séquents, mais pas les éliminations.

[4] Un système similaire est utilisé pour l'inférence des types en ML.

B Quantificateurs

Le calcul propositionnel est trop rudimentaire: pour exprimer des théories mathématiques comme l'arithmétique, il faut enrichir le langage.

Les *termes* du langage sont construits à partir de variables p, q, ... de constantes 0, 1 et de symboles d'opération $+$, $\times$. Les *énoncés atomiques* sont de la forme $t = u$, où t et u sont des termes, et en plus des connecteurs propositionnels, on a les quantificateurs $\forall p.\, A$ et $\exists p.\, A$.

Les règles logiques pour les quantificateurs sont:

$$\frac{\Gamma \vdash A[q/p] \quad \text{(q n'apparaît pas librement dans Γ)}}{\Gamma \vdash \forall p.\, A}\,\forall\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A[t/p] \vdash B}{\Gamma, \forall p.\, A \vdash B}\,\forall\mathcal{G}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/p]}{\Gamma \vdash \exists p.\, A}\,\exists\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A[q/p] \vdash B \quad \text{(q n'apparaît librement ni dans Γ ni dans B)}}{\Gamma, \exists p.\, A \vdash B}\,\exists\mathcal{G}$$

Exercice 10 *Donner les règles analogues en déduction naturelle, avec les nouvelles coupures (y compris les coupures commutatives) et les réductions.*

Notez que la propriété de la sous-formule s'étend à ce calcul, mais à condition de considérer comme sous-formules de $\forall p.\, A$ et $\exists p.\, A$ tous les $A[u/p]$ où u décrit l'ensemble (infini) des termes. De fait, le Hauptsatz reste vrai, mais la prouvabilité devient indécidable.

En plus des règles de démonstration, il faut des axiomes pour l'égalité (par exemple $\forall p.\, p = p$), les opérations (par exemple $0 + 1 = 1$, $\forall p.\, (p + 1 = 0 \Rightarrow \bot)$) et surtout un schéma d'axiome de récurrence:

$$(A[0/p] \wedge \forall p.\, (A \Rightarrow A[p + 1/p])) \Rightarrow \forall p.\, A$$

où A décrit l'ensemble (infini) des énoncés. On obtient ainsi un système formel pour l'*arithmétique de Heyting*, c'est à dire la version intuitionniste de l'*arithmétique de Peano*, mais on est loin de la logique pure, avec $A \vdash A$ pour seul axiome.

La *théorie des types de Martin-Löf* permet de formuler l'arithmétique (et même la plupart des mathématiques) uniquement en termes de règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle (voir [MartinLoef84]), en appliquant le paradigme des *propositions comme types*. Par exemple, la constante 0 et la fonction successeur apparaissent comme des règles d'introduction, et le schéma de récurrence comme une règle d'élimination, pour le type des entiers naturels.

On peut aussi étendre la logique avec des *quantificateurs du second ordre* $\forall X.\, A$ et $\exists X.\, A$ où la variable X représente non plus un entier, mais un prédicat (un ensemble d'entiers). On introduit alors une nouvelle classe d'énoncés atomiques, à savoir $t \in X$ où t est un terme et X une variable de prédicat. Les règles logiques sont tout à fait similaires à celles du premier ordre:

$$\frac{\Gamma \vdash A[Y/X] \quad \text{(}Y\text{ n'apparaît pas librement dans }\Gamma\text{)}}{\Gamma \vdash \forall X.\, A}\,\forall\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A[\{p.C\}/X] \vdash B}{\Gamma, \forall X.\, A \vdash B}\,\forall\mathcal{G}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A[\{p.C\}/X]}{\Gamma \vdash \exists X.\, A}\,\exists\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A[Y/X] \vdash B \quad \text{(}Y\text{ n'apparaît librement ni dans }\Gamma\text{ ni dans }B\text{)}}{\Gamma, \exists X.\, A \vdash B}\,\exists\mathcal{G}$$

où $A[\{p.C\}/X]$ signifie que toutes les occurrences libres de $t \in X$ dans A sont remplacées par $C[t/p]$.

Cela permet de construire un système baptisé *arithmétique du second ordre* (ou *analyse*) *de Heyting*, dans lequel il n'est même plus besoin de schéma de récurrence. Il suffit de considérer comme "entiers naturels" les objets q qui vérifient le prédicat:

$$\forall X. ((0 \in X \wedge \forall p. (p \in X \Rightarrow p+1 \in X)) \Rightarrow q \in X)$$

Autrement dit, le schéma de récurrence est internalisé.

C Séquents classiques

A l'origine, Gentzen considérait un calcul classique, avec des séquents symétriques de la forme $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ (où la disjonction des B_j pour $j = 1, \ldots, m$ prétend être conséquence de la conjonction des A_i pour $i = 1, \ldots, n$).

Dans ce calcul, les règles structurelles opèrent à droite aussi bien qu'à gauche:

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Theta}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash \Theta} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash \Theta}{\Gamma, A \vdash \Theta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma, A \vdash \Theta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta, A, B, \Lambda}{\Gamma \vdash \Theta, B, A, \Lambda} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Theta}{\Gamma \vdash A, \Theta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Theta}{\Gamma \vdash A, \Theta}$$

Le lien axiome est inchangé, mais la coupure est généralisée:

$$\frac{}{A \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Theta \quad \Delta, A \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash \Theta, \Lambda}\,\mathcal{C}$$

En logique classique, la négation est une notion primitive qui internalise la symétrie gauche/droite:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Theta}{\Gamma \vdash \neg A, \Theta}\,\neg\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Theta}{\Gamma, \neg A \vdash \Theta}\,\neg\mathcal{G}$$

Les autres règles logiques sont analogues au cas intuitionniste:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Theta \quad \Delta \vdash B, \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B, \Theta, \Lambda}\,\wedge\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Theta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Theta}\,\wedge^1\mathcal{G} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash \Theta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Theta}\,\wedge^2\mathcal{G}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Theta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Theta}\Rightarrow\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Theta \quad \Delta, B \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Theta, \Lambda}\Rightarrow\mathcal{G}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Theta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Theta}\vee^1\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma \vdash B, \Theta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Theta}\vee^2\mathcal{D} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Theta \quad \Delta, B \vdash \Lambda}{\Gamma, \Delta, A \vee B \vdash \Theta, \Lambda}\vee\mathcal{G} \qquad \frac{}{\bot \vdash}\bot\mathcal{G}$$

Exercice 11 *Démontrer le principe du tiers exclus $A \vee \neg A$, ainsi que les équivalences suivantes:*

– $\neg\neg A$ avec A,

– $\neg A$ avec $A \Rightarrow \bot$,

– $A \Rightarrow B$ avec $\neg A \vee B$,

– $\neg(A \wedge B)$ avec $\neg A \vee \neg B$.

Exercice 12 *Soit $\mathcal{B}$, l'ensemble des énoncés muni du préordre: $A \leq B$ si et seulement si $A \vdash B$ est démontrable. Vérifier que $\mathcal{B}$ quotienté par la relation d'équivalence associée est une algèbre de Boole (complétude du calcul).*

D Hauptsatz

Nous donnons ici (l'idée de) la preuve du théorème de Gentzen dans le cas intuitionniste. Ce qu'il faut avoir vu au moins une fois dans sa vie, ce sont les réductions de coupures de la forme:

$$\frac{\dfrac{\cdots}{\Gamma \vdash A}*\mathcal{D} \qquad \dfrac{\cdots}{\Delta, A \vdash B}*\mathcal{G}}{\Gamma, \Delta \vdash B}\mathcal{C}$$

où $*$ est, bien sûr, le connecteur principal de A. On comprend alors que les règles logiques sont loin d'être arbitraires. Pour chaque connecteur, il y a complémentarité entre règles à gauche et à droite:

$$\frac{\dfrac{\overset{\vdots}{\Gamma \vdash A} \quad \overset{\vdots}{\Delta \vdash B}}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\wedge\mathcal{D} \qquad \dfrac{\overset{\vdots}{\Theta, A \vdash C}}{\Theta, A \wedge B \vdash C}\wedge^1\mathcal{G}}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \genfrac{}{}{1.5pt}{}{\dfrac{\overset{\vdots}{\Gamma \vdash A} \quad \overset{\vdots}{\Theta, A \vdash C}}{\Gamma, \Theta \vdash C}\mathcal{C}}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}$$

$$\frac{\dfrac{\overset{\vdots}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\Rightarrow\mathcal{D} \qquad \dfrac{\overset{\vdots}{\Delta \vdash A} \quad \overset{\vdots}{\Theta, B \vdash C}}{\Delta, \Theta, A \Rightarrow B \vdash C}\Rightarrow\mathcal{G}}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \genfrac{}{}{1.5pt}{}{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\Delta \vdash A} \quad \overset{\vdots}{\Gamma, A \vdash B}}{\Delta, \Gamma \vdash B}\mathcal{C} \qquad \overset{\vdots}{\Theta, B \vdash C}}{\Delta, \Gamma, \Theta \vdash C}\mathcal{C}}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\vee^1\mathcal{D} \qquad \dfrac{\stackrel{\vdots}{\Delta, A \vdash C} \quad \stackrel{\vdots}{\Delta, B \vdash C}}{\Delta, A \vee B \vdash C}\,\vee\mathcal{G}}{\Gamma, \Delta \vdash C}\,\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma \vdash A} \quad \stackrel{\vdots}{\Delta, A \vdash C}}{\Gamma, \Delta \vdash C}\,\mathcal{C}$$

Notez que dans chaque cas, les nouvelles coupures portent sur des énoncés de moindre complexité.

Exercice 13 *Donner les réductions analogues pour les quantificateurs du premier et du second ordre.*

Lorsque l'une des prémisses est un lien axiome, la réduction est évidente:

$$\dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{\Gamma \vdash A}\,\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \stackrel{\vdots}{\Gamma \vdash A} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A} \quad \stackrel{\vdots}{\Gamma, A \vdash B}}{A, \Gamma \vdash B}\,\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \stackrel{\vdots}{\Gamma, A \vdash B} \\ \hline\hline A, \Gamma \vdash B \end{array}$$

Lorsque la prémisse gauche est une règle logique à gauche ou structurelle, il faut "remonter" la coupure, par exemple:

$$\dfrac{\dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma, A \vdash C}}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\,\wedge^1\mathcal{G} \qquad \stackrel{\vdots}{\Delta, C \vdash D}}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash D}\,\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{c} \dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma, A \vdash C} \quad \stackrel{\vdots}{\Delta, C \vdash D}}{\Gamma, A, \Delta \vdash D}\,\mathcal{C} \\ \hline\hline \Gamma, \Delta, A \vdash D \end{array}}{\Gamma, \Delta, A \wedge B \vdash D}\,\wedge^1\mathcal{G} \\ \hline\hline \Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash D \end{array}$$

et de même si la prémisse droite est une règle logique à droite.

Exercice 14 *Réduire la coupure suivante de toutes les façons possibles:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}}{A \wedge B \vdash A}\,\wedge^1\mathcal{G} \qquad \dfrac{\dfrac{}{C \vdash C} \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{C, A \vdash C \wedge A}\,\wedge\mathcal{D}}{A \wedge B, C \vdash C \wedge A}\,\mathcal{C}$$

Si la prémisse droite est un affaiblissement, il n'y a pas de problème:

$$\dfrac{\stackrel{\vdots}{\Gamma \vdash A} \qquad \begin{array}{c} \stackrel{\vdots}{\Delta \vdash B} \\ \hline\hline \Delta, A \vdash B \end{array}}{\Gamma, \Delta \vdash B}\,\mathcal{C} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \stackrel{\vdots}{\Delta \vdash B} \\ \hline\hline \Gamma, \Delta \vdash B \end{array}$$

Mais tout se complique si c'est une contraction:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vdash A\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Delta, A, A\vdash B\end{array}}{\Delta, A\vdash B}}{\Gamma, \Delta\vdash B}\,\mathcal{C} \quad\rightarrow\quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vdash A\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\vdash A\end{array}\quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Delta, A, A\vdash B\end{array}}{\Gamma, \Delta, A\vdash B}\,\mathcal{C}}{\Gamma, \Gamma, \Delta\vdash B}\,\mathcal{C}}{\Gamma, \Delta\vdash B}$$

Comme on doit dupliquer la preuve de $\Gamma \vdash A$, il n'est pas évident que le processus de réduction va terminer (voir par exemple [Girard89] pour une démonstration dans le cadre du calcul classique).