Logique mathématique et Linguistique ”Computationnelle”

- Théorie de la démonstration : l’étude mathématique des preuves formelles
- Linguistique ” Computationnelle” : formalisation des langues naturelles, d’une part pour développer des outils pour le traitement automatique des langues, d’autre part pour éprouver dans un modèle les théories linguistiques.

Zoom sur quelques objets de la théorie de la démonstration

1. Les systèmes formels : exemples

- systèmes axiomatiques : en gros une preuve est un texte, une suite de formules ; on rajoute une formule à une liste soit parce que cette formule est un axiome, soit parce qu'elle se déduit de formules précédentes par la règle du modus ponens.

- déduction naturelle : en gros une preuve est un arbre dont les feuilles sont les hypothèses et les noeuds des règles qui précisent comment introduire des formules composées ou bien décomposer ces formules.

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash B}$$

2. Le λ-calcul typé

$$\frac{\vec{x} : \Gamma, x : A \vdash t : B}{\vec{x} : \Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B} \qquad \frac{\vec{x} : \Gamma \vdash M : A \Rightarrow B \quad \vec{y} : \Delta \vdash N : A}{\vec{x} : \Gamma, \vec{y} : \Delta \vdash (M)N : B}$$

$$(\lambda x.t)N \mapsto_\beta t[N/x]$$

Les grammaires catégorielles Il s'agit de grammaires lexicalisées. A partir d'un ensemble de catégories ou types atomiques $\mathcal{T}_0 = \{s, sn, n, \ldots\}$ on se donne un ensemble de types :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 | \mathcal{T}/\mathcal{T} | \mathcal{T}\backslash\mathcal{T} | \mathcal{T} \bullet \mathcal{T}$$

On dispose de règles de calcul sur les types :

$$x \bullet (x\backslash y) \mapsto y \text{ et } (y/x) \bullet x \mapsto y$$

Le lexique associe à chaque mot m_i un ensemble fini de types $\mathcal{L}(m_i) = \{t_i^1, \ldots, t_i^n\}$. Le langage engendré est l'ensemble des suites de mots $m_1, \ldots m_k$ telles que pour chaque m_i il existe un type $t_i \in \mathcal{L}(m_i)$ tel que $t_1 \bullet \ldots \bullet t_k \mapsto s$.

Exemple

Avec *le* : sn/n, *petit* : n/n, garçon: n, *mange* : $(sn\backslash s)/sn$, *une* : sn/n et *pomme* : n on obtient
$(sn/n \bullet (n/n \bullet n)) \bullet ((sn\backslash s)/sn \bullet ((sn/n) \bullet n)) \mapsto s$.

Le calcul de Lambek et l'irruption de la logique

On peut formaliser les grammaires catégorielles sous une forme logique.

Avec le même ensemble de types (en identifiant $A\backslash B$ avec $A \multimap B$ et B/A avec $A \multimapinv B$), le même lexique, on va manipuler à la place d'expressions

$t_1 \bullet \ldots \bullet t_k \mapsto s$ des séquents $t_1, \ldots, t_k \vdash s$

et les règles de calcul des grammaires catégorielles sont les règles d'un système formel logique : en fait les règles d'une déduction naturelle intuitionniste et linéaire non commutative.

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{le}}{sn \mathbin{\bullet\!-} n \vdash sn \mathbin{\bullet\!-} n} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{petit}}{n \mathbin{\bullet\!-} n \vdash n \mathbin{\bullet\!-} n} \quad \dfrac{\text{garçon}}{n \vdash n}}{n \mathbin{\bullet\!-} n, n \vdash n}}{sn \mathbin{\bullet\!-} n, n \mathbin{\bullet\!-} n, n \vdash sn} \qquad \dfrac{\text{mange}}{sn \mathbin{-\!\bullet} s \vdash sn \mathbin{-\!\bullet} s}}{sn \mathbin{\bullet\!-} n, n \mathbin{\bullet\!-} n, n, sn \mathbin{-\!\bullet} s \vdash s}$$

La sémantique de Montague

Une sémantique prédicative, basée sur un principe de compositionnalité : "la signification d'une expression composée doit être une fonction de la signification de ses composantes". Formalisée dans le cadre d'un λ-calcul typé.

Dans ce λ-calcul deux types : e pour les individus ou entités et t (truth) pour les propositions.

au verbe intransitif "mord" est le λ-terme $m = \lambda x.MORD(x)$ de type $e \rightarrow t$.

Des grammaires catégorielles à la sémantique de Montague

Type syntaxique	*Type semantique*
n	$e \rightarrow t$
sn	e
s	t
$A \multimap B$	$A \rightarrow B$
$A \circ\!\!- B$	$A \rightarrow B$
$s \circ\!\!- (sn \multimap s)$	$(e \rightarrow t) \rightarrow t$

Exemples "Certains chiens mordent."

Mot : type syntaxique

type sémantique

1. Lexique : **λ-terme**

certains :$(s \bullet\!\!- (sn -\!\!\bullet s)) \bullet\!\!- n$

$(e \to t) \to (e \to t) \to t$

$C = \lambda P \lambda Q \exists y (P)y \wedge (Q)y$

chiens :n

$e \to t$

$c = \lambda x CHIEN(x)$

mordent:$sn -\!\!\bullet s$

$e \to t$

$m = \lambda x MORD(x)$

Exemple "Certains chiens mordent"

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{certains}}{(s \bullet\!\!- (sn \multimap\!\!\bullet\, s)) \bullet\!\!- n \vdash (s \bullet\!\!- (sn \multimap\!\!\bullet\, s)) \bullet\!\!- n} \quad \dfrac{\text{chiens}}{n \vdash n}}{(s \bullet\!\!- (sn \multimap\!\!\bullet\, s)) \bullet\!\!- n, n \vdash s \bullet\!\!- (sn \multimap\!\!\bullet\, s)} \quad \dfrac{\text{mordent}}{sn \multimap\!\!\bullet\, s \vdash sn \multimap\!\!\bullet\, s}}{(s \bullet\!\!- (sn \multimap\!\!\bullet\, s)) \bullet\!\!- n, n, sn \multimap\!\!\bullet\, s \vdash s}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C \vdash C : (e \to t) \to (e \to t) \to t} \quad \dfrac{}{c \vdash c : e \to t}}{C, c \vdash (C)c : (e \to t) \to t} \quad \dfrac{}{m \vdash m : e \to t}}{C, c, m \vdash ((C)c)m : t}$$

Et

$((C)c)m = ((\lambda P \lambda Q \exists y (P)y \wedge (Q)y)(\lambda x CHIEN(x)))(\lambda z MORD(z))$

qui se réduit en $(\lambda Q \exists y (\lambda x CHIEN(x))y) \wedge (Q.y)))(\lambda z MORD(z))$

puis en $\exists y ((\lambda x CHIEN(x))y \wedge (\lambda z MORD(z)y)$

et finalement en $\exists y (CHIEN(y) \wedge MORD(y))$