

Algorithmes pyramidaux et forêts aléatoires

L. Avena (Université de Leiden, Pays-Bas), F. Castell (I2M, Marseille), A. Gaudillière (I2M, Marseille), C. Melot (I2M, Marseille)
Spécials guests: Dominique Benielli (I2M, Labex Archimède)
et Julien Lefèvre (LSIS) !

Workshop graphes et neurosciences 18/11/2016

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

- Beaucoup de méthodes existent pour traiter des signaux numériques, c'est à dire des vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , ou des matrices...

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

- Beaucoup de méthodes existent pour traiter des signaux numériques, c'est à dire des vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , ou des matrices...
- Besoin de méthodes pour traiter les signaux sur des réseaux (électriques, Internet etc...), sur des surfaces, par exemple des surfaces triangulées en trois dimensions.

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

- Beaucoup de méthodes existent pour traiter des signaux numériques, c'est à dire des vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , ou des matrices...
- Besoin de méthodes pour traiter les signaux sur des réseaux (électriques, Internet etc...), sur des surfaces, par exemple des surfaces triangulées en trois dimensions.

Quelques notations

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

- Beaucoup de méthodes existent pour traiter des signaux numériques, c'est à dire des vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , ou des matrices...
- Besoin de méthodes pour traiter les signaux sur des réseaux (électriques, Internet etc...), sur des surfaces, par exemple des surfaces triangulées en trois dimensions.

Quelques notations

- Un graphe pondéré fini : triplet $G = \{E, V, w\}$ où
 - ▶ V : un ensemble fini de sommets ($\text{card}(V) < \infty$)
 - ▶ w : fonction sur $V \times V$ à valeurs positives réelles
 - ▶ $E = \{(x, y) : x \neq y \text{ et } w(x, y) > 0\}$ un ensemble d'arêtes.

Cadre général du traitement du signal sur graphe

Problématique : données sur les réseaux

- Beaucoup de méthodes existent pour traiter des signaux numériques, c'est à dire des vecteurs de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , ou des matrices...
- Besoin de méthodes pour traiter les signaux sur des réseaux (électriques, Internet etc...), sur des surfaces, par exemple des surfaces triangulées en trois dimensions.

Quelques notations

- Un graphe pondéré fini : triplet $G = \{E, V, w\}$ où
 - ▶ V : un ensemble fini de sommets ($\text{card}(V) < \infty$)
 - ▶ w : fonction sur $V \times V$ à valeurs positives réelles
 - ▶ $E = \{(x, y) : x \neq y \text{ et } w(x, y) > 0\}$ un ensemble d'arêtes.
- Les signaux sur les graphes sont les fonctions sur V (vecteurs de taille $\text{card}(V)$).

Opérateur laplacien

Opérateur laplacien

- matrice $L = (L(x, y))_{x, y \in V}$ avec $L(x, y) = w(x, y)$ si $x \neq y$ et $L(x, x) = -w(x)$ tel que $w(x) = \sum_{x \neq y} w(x, y)$. On note $\alpha = \max_{x \in V} w(x)$.

Opérateur laplacien

- matrice $L = (L(x, y))_{x, y \in V}$ avec $L(x, y) = w(x, y)$ si $x \neq y$ et $L(x, x) = -w(x)$ tel que $w(x) = \sum_{x \neq y} w(x, y)$. On note $\alpha = \max_{x \in V} w(x)$.
- Les vecteurs propres de L sont les "vecteurs de Fourier" et les valeurs propres "modes de Fourier"

Ondelettes sur graphe

Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

- Filtrage (moyenne locale) suivi d'un sous-échantillonnage :

Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

- Filtrage (moyenne locale) suivi d'un sous-échantillonnage :
 - ▶ $f_1[n] = (h \star f_0)[2n]$ pour l'"approximation"

Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

- Filtrage (moyenne locale) suivi d'un sous-échantillonnage :
 - ▶ $f_1[n] = (h \star f_0)[2n]$ pour l'"approximation"
 - ▶ $g_1[n] = (g \star f_0)[2n]$ pour les "détails".

Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

- Filtrage (moyenne locale) suivi d'un sous-échantillonnage :

- ▶ $f_1[n] = (h \star f_0)[2n]$ pour l'"approximation"

- ▶ $g_1[n] = (g \star f_0)[2n]$ pour les "détails".

→ une base discrète de \mathbb{R}^{2^N} : $\{\phi_k, 0 \leq k \leq 2^N - 1\} \cup \{\psi_k, 0 \leq k \leq 2^N - 1\}$. On a $f_1[n] = \langle \phi_n, f_0 \rangle$ et $g_1[n] = \langle \psi_n, f_0 \rangle$.

Ondelettes sur graphe

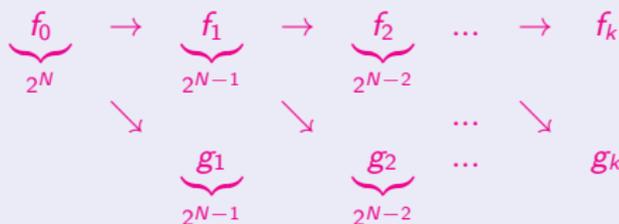
Codage en sous-bande pour les signaux numériques dans \mathbb{R}^n

- Filtrage (moyenne locale) suivi d'un sous-échantillonnage :

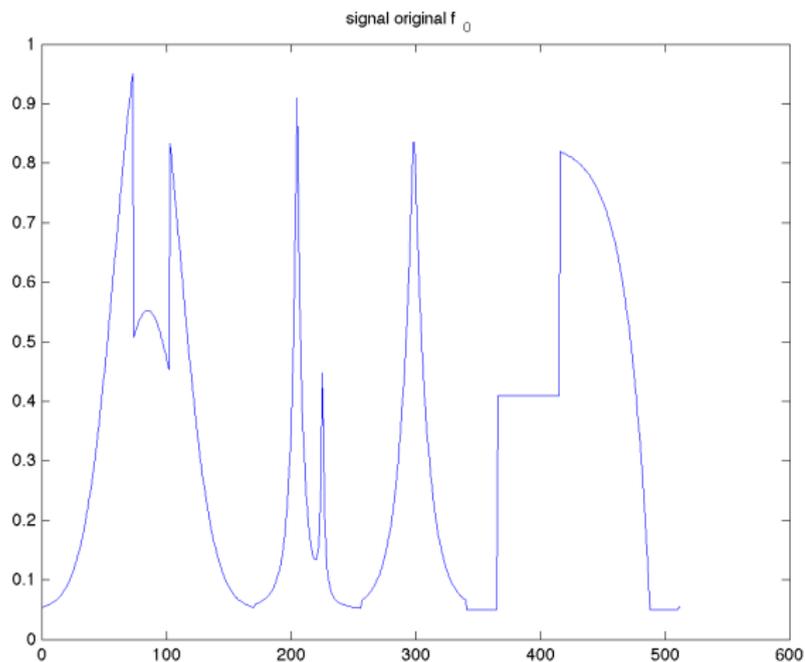
- ▶ $f_1[n] = (h \star f_0)[2n]$ pour l'"approximation"
- ▶ $g_1[n] = (g \star f_0)[2n]$ pour les "détails".

→ une base discrète de \mathbb{R}^{2^N} : $\{\phi_k, 0 \leq k \leq 2^{N-1}\} \cup \{\psi_k, 0 \leq k \leq 2^{N-1}\}$. On a $f_1[n] = \langle \phi_n, f_0 \rangle$ et $g_1[n] = \langle \psi_n, f_0 \rangle$.

- On itère : schéma en "hareng"

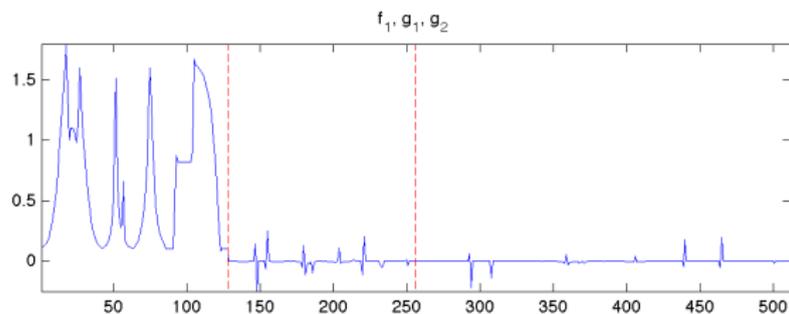
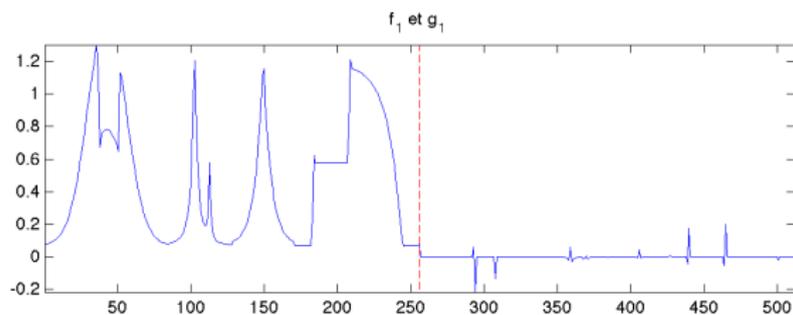


Exemple



signal original

Exemple



deux étapes

Généralisation sur un graphe

Généralisation sur un graphe

- Problème du sous-échantillonnage du graphe : quels points choisir ?

Généralisation sur un graphe

- Problème du sous-échantillonnage du graphe : quels points choisir ?
- Problème du calcul des poids du nouveau sous-graphe.

Généralisation sur un graphe

- Problème du sous-échantillonnage du graphe : quels points choisir ?
- Problème du calcul des poids du nouveau sous-graphe.
- Problème du choix des filtres.

Bibliographie non exhaustive

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
- Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
- Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
- Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Point de vue de probabiliste sur le problème

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Point de vue de probabiliste sur le problème

- Laplacien sur un graphe=générateur d'un processus de Markov en temps continu.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Point de vue de probabiliste sur le problème

- Laplacien sur un graphe=générateur d'un processus de Markov en temps continu.
- Sous-échantillonner un graphe=trouver un ensemble aléatoire de points bien "répartis" sur le graphe.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Point de vue de probabiliste sur le problème

- Laplacien sur un graphe=générateur d'un processus de Markov en temps continu.
- Sous-échantillonner un graphe=trouver un ensemble aléatoire de points bien "répartis" sur le graphe.
- Filtrer une fonction=calculer des moyennes. On les veut locales.

Bibliographie non exhaustive

- Coifman et Maggioni : diffusion wavelets (2006).
 - Hammond, Vandergheynst et Gribonval (2010) : généralisation de la transformée en ondelettes continue.
 - Schuman, Faraji, Vandergheynst (2016) : vecteur de Fielder et réduction de Kron.
- Solution déterministe.
- Tremblay, Borgnat (2016) : filtres de Haar généralisés aux graphes.
- Nécessaire d'utiliser un algorithme de détection de communauté.

Point de vue de probabiliste sur le problème

- Laplacien sur un graphe=générateur d'un processus de Markov en temps continu.
- Sous-échantillonner un graphe=trouver un ensemble aléatoire de points bien "répartis" sur le graphe.
- Filtrer une fonction=calculer des moyennes. On les veut locales.
- Trouver les poids de la matrice du laplacien d'un "sous-graphe"=mettre au point le générateur d'un nouveau processus de Markov sur un espace d'état plus petit, associé d'une certaine façon au premier.

Processus de Markov en temps continu

On se donne

Processus de Markov en temps continu

On se donne

- une matrice de Laplacien. L'opérateur agissant sur \mathbb{R}^n avec $\text{card}(V) = n$ s'écrit
$$Lf(x) = \sum_{y \in V} w(x, y) (f(y) - f(x))$$
 pour tout vecteur $(f(x))_{x \in V}$.

On va supposer ici que L est symétrique (plus généralement réversible), et qu'elle est irréductible.

Processus de Markov en temps continu

On se donne

- une matrice de Laplacien. L'opérateur agissant sur \mathbb{R}^n avec $\text{card}(V) = n$ s'écrit $Lf(x) = \sum_{y \in V} w(x, y) (f(y) - f(x))$ pour tout vecteur $(f(x))_{x \in V}$.

On va supposer ici que L est symétrique (plus généralement réversible), et qu'elle est irréductible.

- On note $X = (X_t, t \geq 0)$ un processus de Markov de générateur L : X saute d'un point x à un point y après un temps qui suit une loi $\mathcal{E}(w(x))$ et avec probabilité $w(x, y)/w(x)$.

Sous-échantillonnage aléatoire

Travaux de L. Avena et A. Gaudillière.

L'algorithme de Wilson permet de trouver un ensemble aléatoire R_q tel que

Sous-échantillonnage aléatoire

Travaux de L. Avena et A. Gaudillière.

L'algorithme de Wilson permet de trouver un ensemble aléatoire R_q tel que

- $\mathbb{E}(E_x(T_{R_q}))$ ne dépend pas de $x \in V$

Sous-échantillonnage aléatoire

Travaux de L. Avena et A. Gaudillière.

L'algorithme de Wilson permet de trouver un ensemble aléatoire R_q tel que

- $\mathbb{E}(E_x(T_{R_q}))$ ne dépend pas de $x \in V$
- R_q est un processus "déterminantal" : $\mathbb{P}(A \subset R_q) = \det_A(K_q)$ où $K_q(x, y) = P_x(X(T_q) = y)$ avec $T_q \sim \mathcal{E}(q)$.

Sous-échantillonnage aléatoire

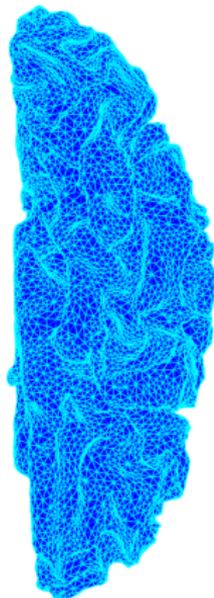
Travaux de L. Avena et A. Gaudillière.

L'algorithme de Wilson permet de trouver un ensemble aléatoire R_q tel que

- $\mathbb{E}(E_x(T_{R_q}))$ ne dépend pas de $x \in V$
- R_q est un processus "déterminantal" : $\mathbb{P}(A \subset R_q) = \det_A(K_q)$ où $K_q(x, y) = P_x(X(T_q) = y)$ avec $T_q \sim \mathcal{E}(q)$.
- En particulier on connaît aussi la loi de $\text{card}(R_q)$.

On choisit R_q comme ensemble de sous-échantillonnage. On note $\bar{x} \in R_q$ et $m = \text{card}(R_q)$.

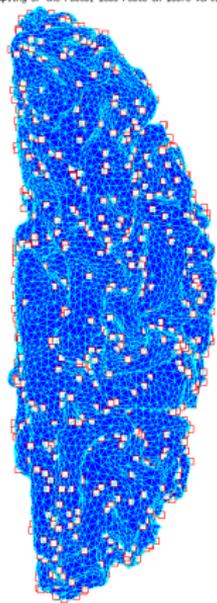
Exemples



surface originale

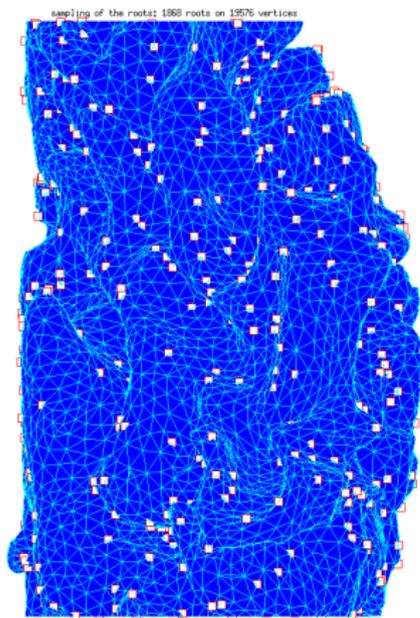
Exemples

sampling of the roots: 1868 roots on 19576 vertices



q "petit"

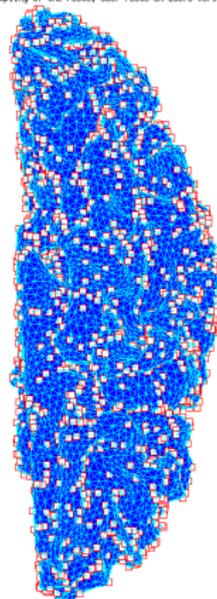
Exemples



q "petit"

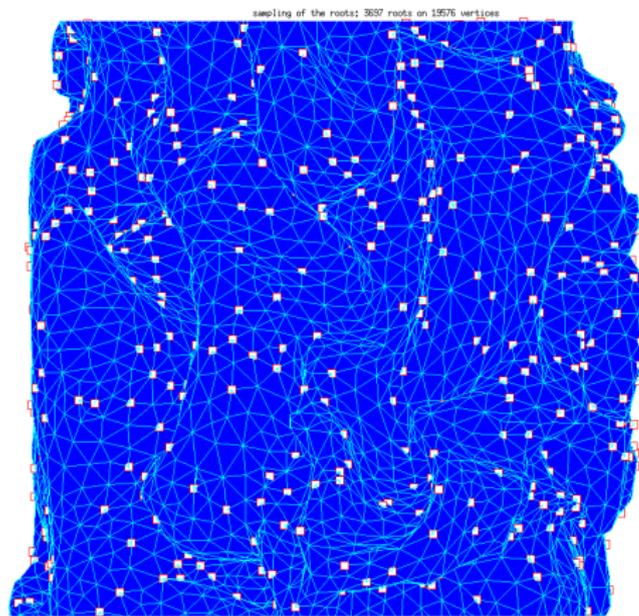
Exemples

sampling of the roots: 3637 roots on 19576 vertices



q "moyen"

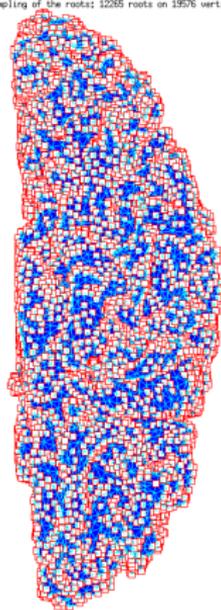
Exemples



q "moyen"

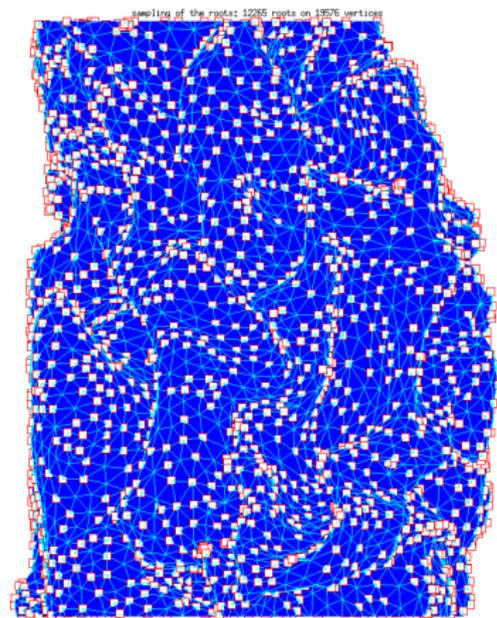
Exemples

sampling of the roots: 12285 roots on 19576 vertices



q "grand"

Exemples



q "grand"

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- $\bar{\Lambda}$ est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $v_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{A} L = \bar{L} \bar{A}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- \bar{A} est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $v_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{A} L = \bar{L} \bar{A}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- \bar{A} est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $v_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- $\bar{\Lambda}$ est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $v_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $v_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- $\bar{\Lambda}$ est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $v_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $v_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.
- On va donc construire des solutions approchées, avec les $v_{\bar{x}}$ qu'on veut bien localisées et bien réparties sur tout le graphe.
 - ▶ Elles formeront un système libre.
 - ▶ Elles se calculeront facilement.

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{A} L = \bar{L} \bar{A}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- \bar{A} est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $\nu_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $\nu_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.
- On va donc construire des solutions approchées, avec les $\nu_{\bar{x}}$ qu'on veut bien localisées et bien réparties sur tout le graphe.
 - ▶ Elles formeront un système libre.
 - ▶ Elles se calculeront facilement.
- Avec ces solutions approchées on pourra calculer à partir de f_0 le vecteur $f_1(\bar{x}) = \langle \nu_{\bar{x}}, f_0 \rangle$ pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et on aura aussi le graphe sur lequel vit f_1 .

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{A} L = \bar{L} \bar{A}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- \bar{A} est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $\nu_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $\nu_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.
- On va donc construire des solutions approchées, avec les $\nu_{\bar{x}}$ qu'on veut bien localisées et bien réparties sur tout le graphe.
 - ▶ Elles formeront un système libre.
 - ▶ Elles se calculeront facilement.
- Avec ces solutions approchées on pourra calculer à partir de f_0 le vecteur $f_1(\bar{x}) = \langle \nu_{\bar{x}}, f_0 \rangle$ pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et on aura aussi le graphe sur lequel vit f_1 .
- On aura donc construit un système libre $\{\phi_{\bar{x}}, \bar{x} \in \bar{V}\}$ sur \mathbb{R}^n , et on proposera aussi un système de $\{\psi_{\check{x}}, \check{x} \in \check{V}\}$ sur \mathbb{R}^n avec $V = \bar{V} \cup \check{V}$.

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{\Lambda} L = \bar{L} \bar{\Lambda}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- $\bar{\Lambda}$ est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $\nu_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $\nu_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.
- On va donc construire des solutions approchées, avec les $\nu_{\bar{x}}$ qu'on veut bien localisées et bien réparties sur tout le graphe.
 - ▶ Elles formeront un système libre.
 - ▶ Elles se calculeront facilement.
- Avec ces solutions approchées on pourra calculer à partir de f_0 le vecteur $f_1(\bar{x}) = \langle \nu_{\bar{x}}, f_0 \rangle$ pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et on aura aussi le graphe sur lequel vit f_1 .
- On aura donc construit un système libre $\{\phi_{\bar{x}}, \bar{x} \in \bar{V}\}$ sur \mathbb{R}^n , et on proposera aussi un système de $\{\psi_{\check{x}}, \check{x} \in \check{V}\}$ sur \mathbb{R}^n avec $V = \bar{V} \cup \check{V}$.
- on est capable de calculer une reconstruction de f_0 à partir de f_1 et g_1 .

Équation d'entrelacement de deux chaînes de Markov

(Diaconis et Fill 1990) : $\bar{L} L = \bar{L} \bar{L}$

- L est la matrice d'un laplacien de taille $n \times n$,
- \bar{L} est une matrice $m \times n$ dont chaque ligne $\nu_{\bar{x}}$ donne une mesure de probabilité.
- \bar{L} est la matrice d'un laplacien de taille $m \times m$.

Solutions

- Il existe des solutions exactes mais elles ne nous conviennent pas : les $\nu_{\bar{x}}$ ne sont pas du tout localisées.
- On va donc construire des solutions approchées, avec les $\nu_{\bar{x}}$ qu'on veut bien localisées et bien réparties sur tout le graphe.
 - ▶ Elles formeront un système libre.
 - ▶ Elles se calculeront facilement.
- Avec ces solutions approchées on pourra calculer à partir de f_0 le vecteur $f_1(\bar{x}) = \langle \nu_{\bar{x}}, f_0 \rangle$ pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et on aura aussi le graphe sur lequel vit f_1 .
- On aura donc construit un système libre $\{\phi_{\bar{x}}, \bar{x} \in \bar{V}\}$ sur \mathbb{R}^n , et on proposera aussi un système de $\{\psi_{\check{x}}, \check{x} \in \check{V}\}$ sur \mathbb{R}^n avec $V = \bar{V} \cup \check{V}$.
- on est capable de calculer une reconstruction de f_0 à partir de f_1 et g_1 .
- Etape suivante : itérer le processus sur \mathbb{R}^m .

Une proposition

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.
- On pose pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et $y \in V$: $\bar{\Lambda}(\bar{x}, y) = \phi_{\bar{x}}(y) = P_{\bar{x}}(X(T_{q'}) = y) = K_{q'}(\bar{x}, y)$

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.
- On pose pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et $y \in V$: $\bar{\Lambda}(\bar{x}, y) = \phi_{\bar{x}}(y) = P_{\bar{x}}(X(T_{q'}) = y) = K_{q'}(\bar{x}, y)$
- On pose $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = P_{\bar{x}}(X(T_{R_q}^+) = \bar{y})$ et alors $\bar{L} = \alpha(\bar{P} - Id)$

Solutions approchées

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.
- On pose pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et $y \in V$: $\bar{\Lambda}(\bar{x}, y) = \phi_{\bar{x}}(y) = P_{\bar{x}}(X(T_{q'}) = y) = K_{q'}(\bar{x}, y)$
- On pose $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = P_{\bar{x}}(X(T_{R_q}^+) = \bar{y})$ et alors $\bar{L} = \alpha(\bar{P} - Id)$
- On pose pour $\psi_{\bar{x}}(y) = \frac{K_{q'}(\bar{x}, y) - \delta_{\bar{x}}(y)}{2(1 - K_{q'}(\bar{x}, \bar{x}))}$

Concrètement...

Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.
- On pose pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et $y \in V$: $\bar{\Lambda}(\bar{x}, y) = \phi_{\bar{x}}(y) = P_{\bar{x}}(X(T_{q'}) = y) = K_{q'}(\bar{x}, y)$
- On pose $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = P_{\bar{x}}(X(T_{R_q}^+) = \bar{y})$ et alors $\bar{L} = \alpha(\bar{P} - Id)$
- On pose pour $\psi_{\bar{x}}(y) = \frac{K_{q'}(\bar{x}, y) - \delta_{\bar{x}}(y)}{2(1 - K_{q'}(\bar{x}, \bar{x}))}$

Concrètement...

- $\phi_{\bar{x}}(y) = q'(q'Id - L)^{-1}(\bar{x}, y)$ et de même $\psi_{\bar{x}}$ se calcule à partir de $(q'Id - L)^{-1}$

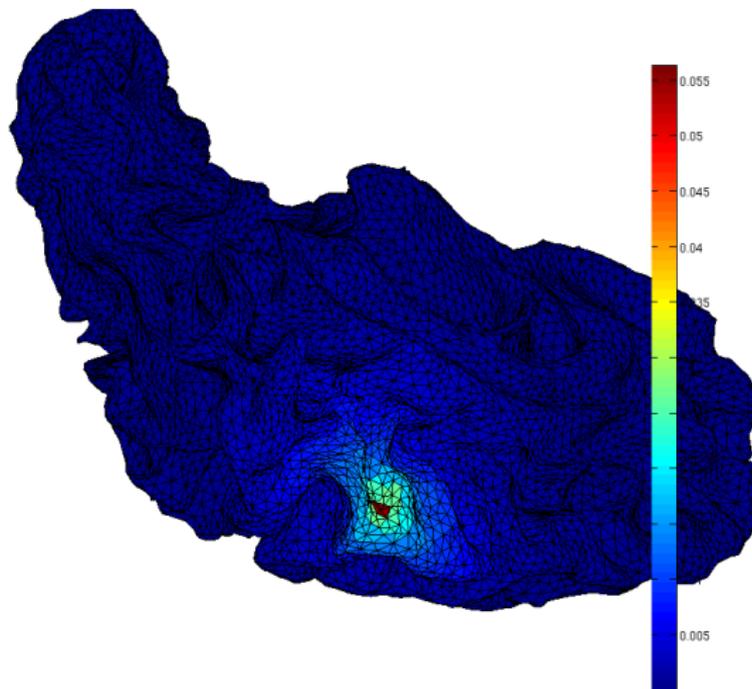
Une proposition

- On suppose qu'on a tiré $R_q = \bar{V}$ pour $q > 0$ fixé.
- On fixe $q' > 0$.
- On pose pour $\bar{x} \in \bar{V}$ et $y \in V$: $\bar{L}(\bar{x}, y) = \phi_{\bar{x}}(y) = P_{\bar{x}}(X(T_{q'}) = y) = K_{q'}(\bar{x}, y)$
- On pose $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}) = P_{\bar{x}}(X(T_{R_q}^+) = \bar{y})$ et alors $\bar{L} = \alpha(\bar{P} - Id)$
- On pose pour $\psi_{\bar{x}}(y) = \frac{K_{q'}(\bar{x}, y) - \delta_{\bar{x}}(y)}{2(1 - K_{q'}(\bar{x}, \bar{x}))}$

Concrètement...

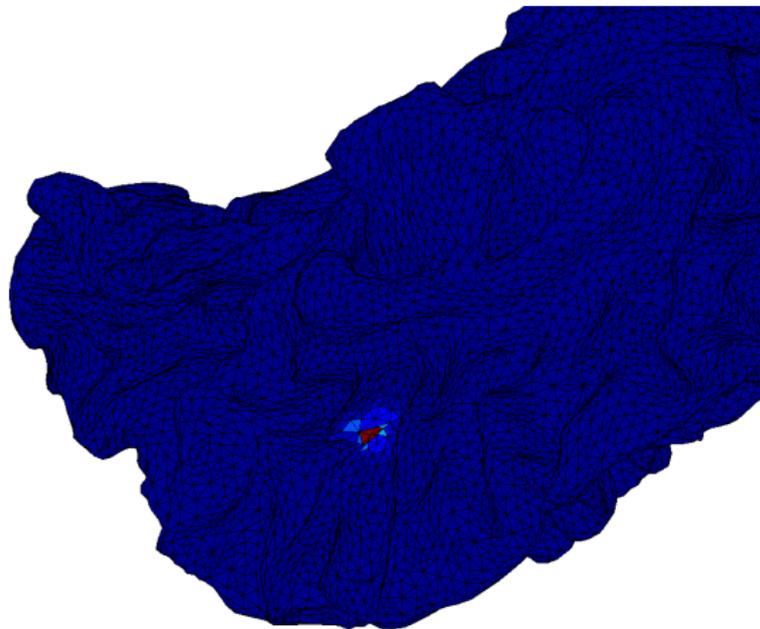
- $\phi_{\bar{x}}(y) = q'(q'Id - L)^{-1}(\bar{x}, y)$ et de même $\psi_{\bar{x}}$ se calcule à partir de $(q'Id - L)^{-1}$
- \bar{L} est le complément de Schur de $V/\bar{V} = \check{V}$ dans L , c'est à dire si on écrit $L = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A = L_{\bar{V} \times \bar{V}}$, $B = L_{\bar{V} \times \check{V}}$, $C = L_{\check{V} \times \bar{V}}$ et $D = L_{\check{V} \times \check{V}}$ on a $\bar{L} = A - BD^{-1}C$.

Simulations



q' petit

Simulations

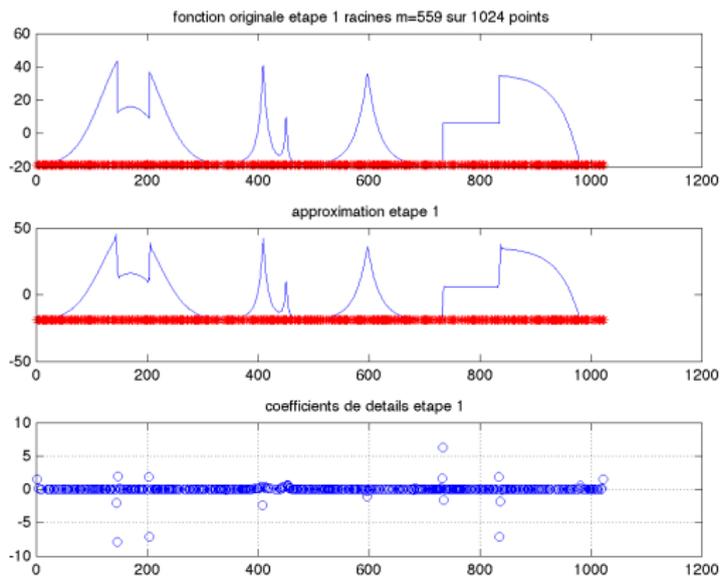


q' grand

Fixer les paramètres

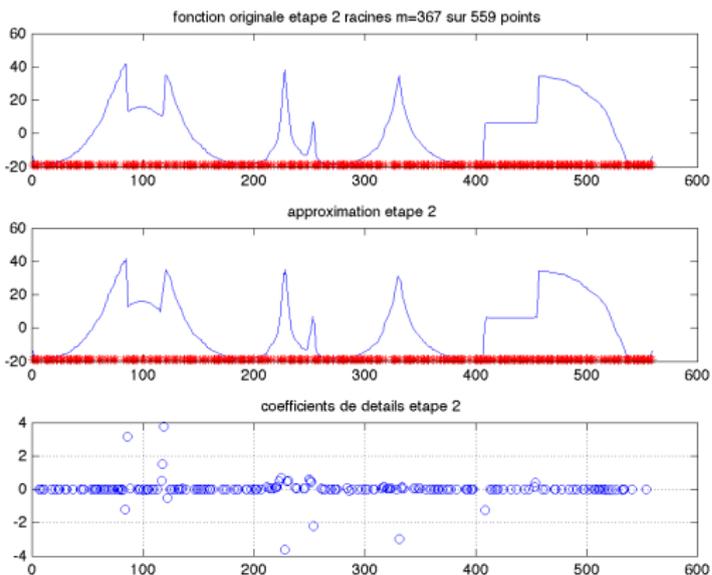
- On fixe d'abord q dans une fenêtre pour garantir un certain nombre de racines.
- On fixe q' : on cherche à la fois avoir un bon conditionnement de l'opérateur de reconstruction et que les fonctions régulières (dont le laplacien a des coefficients petits) soient bien approchées.

Simulations



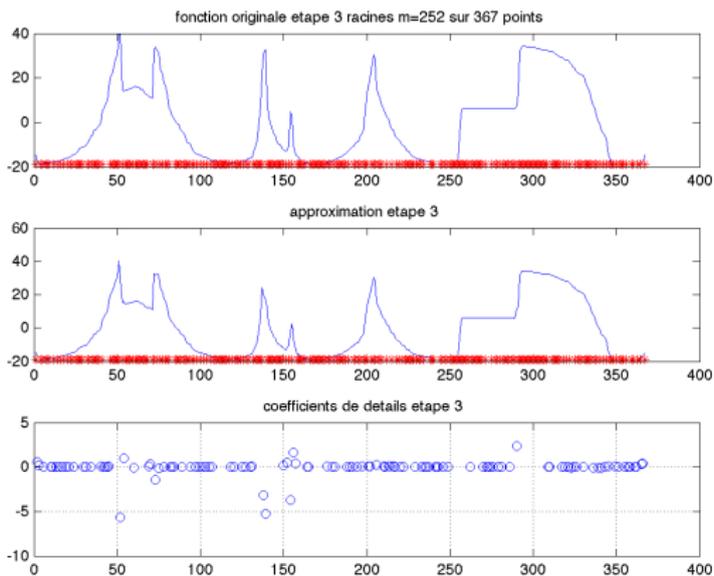
Etape1

Simulations



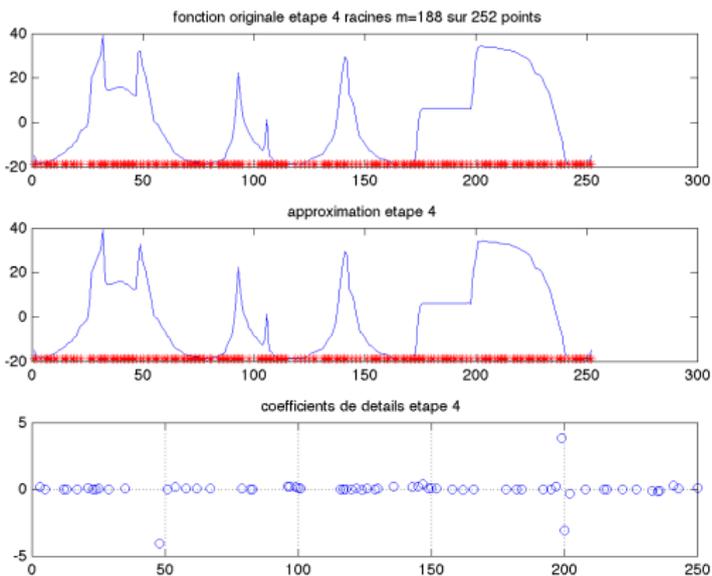
Etape 2

Simulations



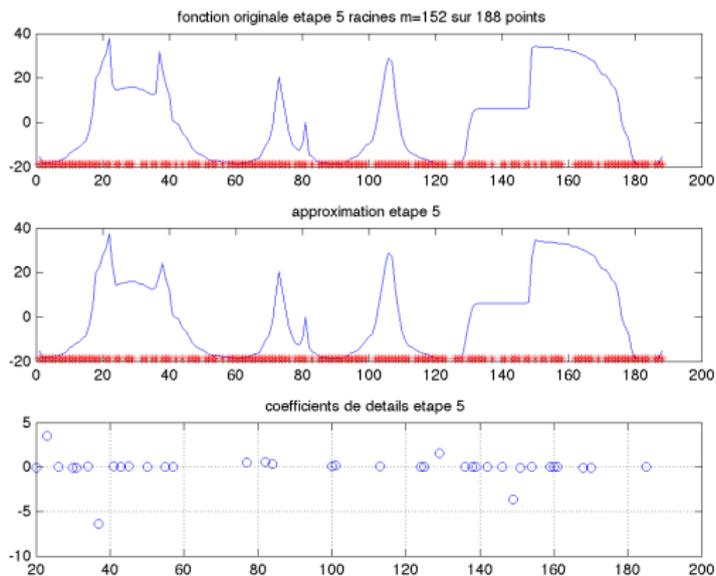
Etape3

Simulations



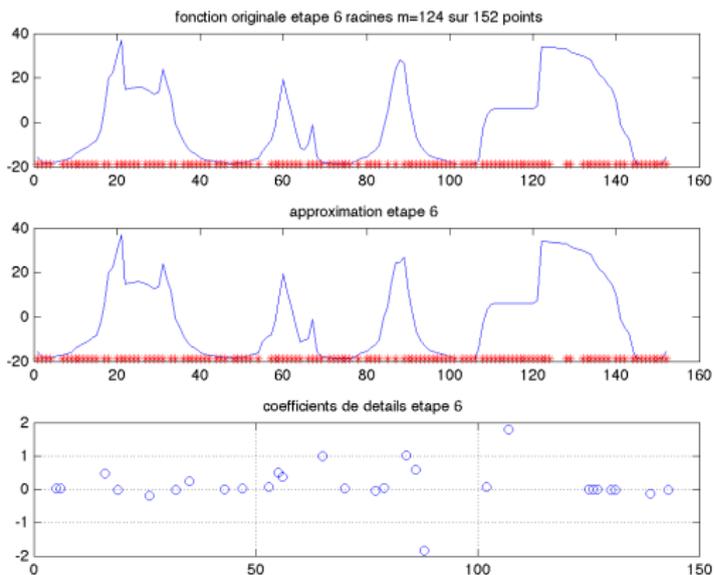
Etape 4

Simulations



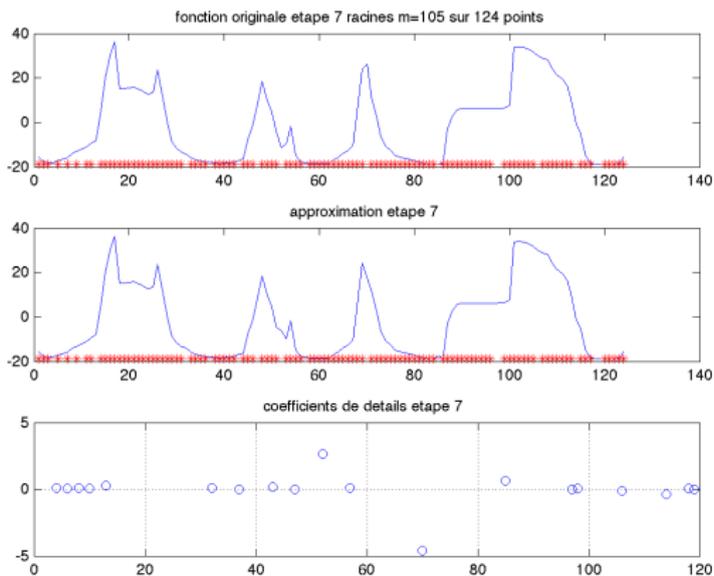
Etape5

Simulations



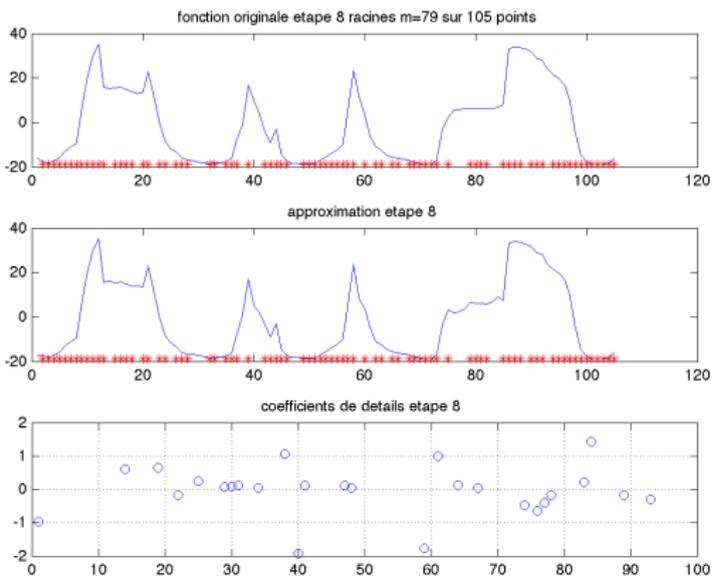
Etape 6

Simulations



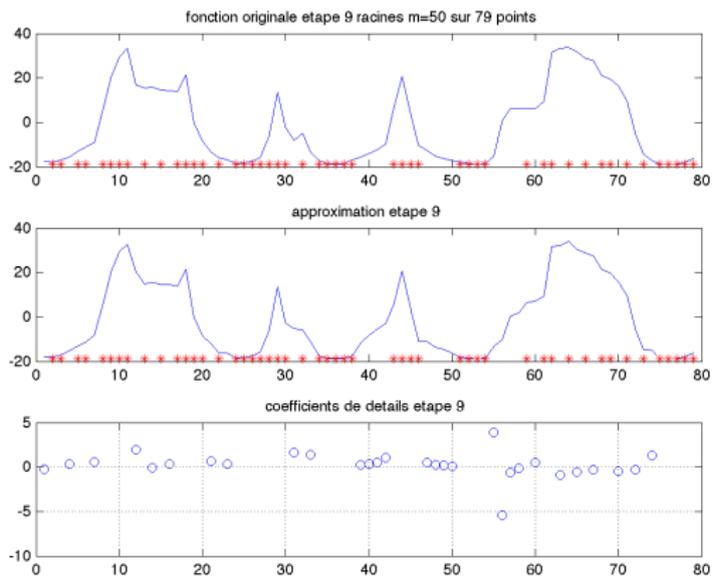
Etape7

Simulations



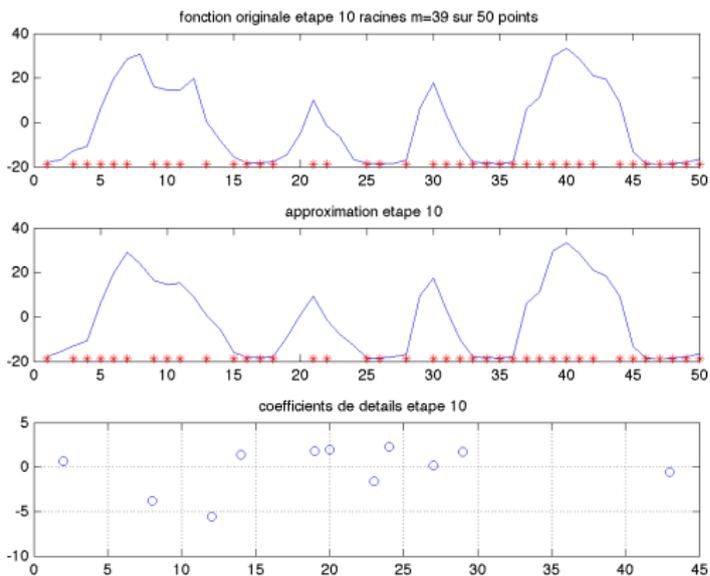
Etape 8

Simulations



Etape9

Simulations



Etape 10

- Multirésolution : on a une tactique pour fixer les paramètres q et q' . L'objectif est maintenant de traiter des signaux !
- Etape suivante :
 - ▶ Accélérer les algorithmes.
 - ▶ Développer la théorie liée à ces ondelettes : régularité ponctuelle et globale, théorie de l'approximation etc...