

Les bases de Wilson: un outil mathématique pour la détection et l'analyse des chirps

Stéphane Jaffard

Université Paris Est

Journée “Détection et ondes gravitationnelles”

FRUMAM 11 octobre 2017

Mathématiques et traitement du signal :

Analyse harmonique

► Analyse de Fourier



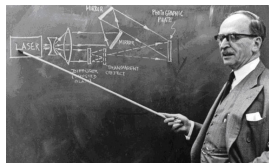
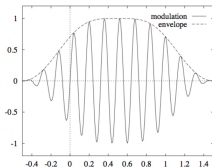
Mathématiques et traitement du signal :

Analyse harmonique

► Analyse de Fourier



► Analyse temps-fréquence



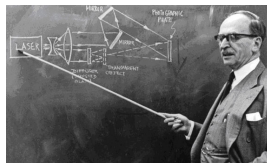
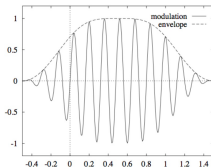
Mathématiques et traitement du signal :

Analyse harmonique

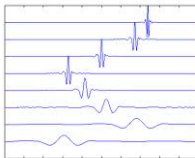
► Analyse de Fourier



► Analyse temps-fréquence



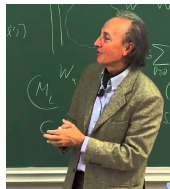
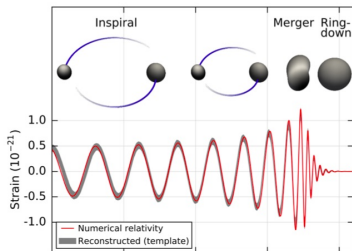
► Analyse temps-échelle



A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

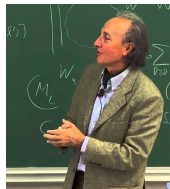
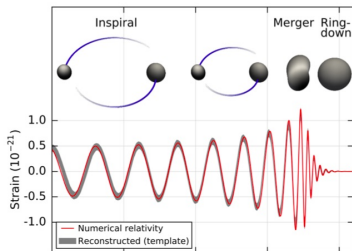
Le cas d'une binaire de trous noirs coalescente



L. Blanchet, T. Damour et al.
+ relativité numérique

A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

Le cas d'une binaire de trous noirs coalescente

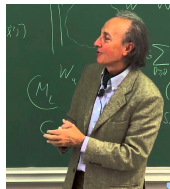
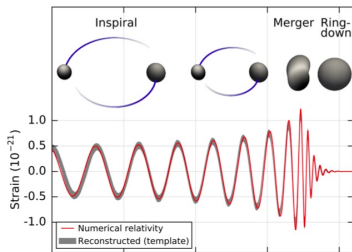


L. Blanchet, T. Damour et al.
+ relativité numérique

La fréquence instantanée évolue lentement avec le temps

A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

Le cas d'une binaire de trous noirs coalescente



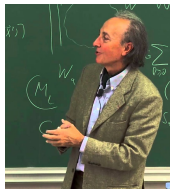
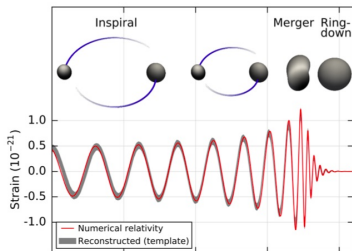
L. Blanchet, T. Damour et al.
+ relativité numérique

La fréquence instantanée évolue lentement avec le temps

$$f(t) = \text{Re} \left(a(t) e^{i\varphi(t)} \right)$$

A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

Le cas d'une binaire de trous noirs coalescente



L. Blanchet, T. Damour et al.
+ relativité numérique

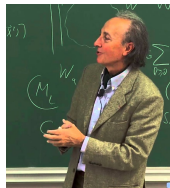
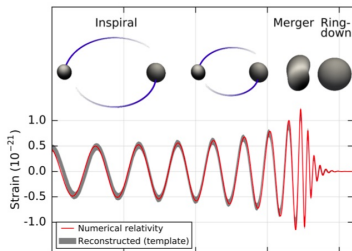
La fréquence instantanée évolue lentement avec le temps

$$f(t) = \text{Re} \left(a(t) e^{i\varphi(t)} \right) \quad \text{avec} \quad \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \ll \varphi'(t)$$

l'amplitude varie peu sur une pseudo-période $2\pi/\varphi'(t)$

A quoi ressemble une onde gravitationnelle ?

Le cas d'une binaire de trous noirs coalescente



L. Blanchet, T. Damour et al.
+ relativité numérique

La fréquence instantanée évolue lentement avec le temps

$$f(t) = \text{Re} \left(a(t) e^{i\varphi(t)} \right) \quad \text{avec} \quad \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \ll \varphi'(t)$$

l'amplitude varie peu sur une pseudo-période $2\pi/\varphi'(t)$

$$\text{et} \quad \left| \frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} \right| \ll 1$$

la pseudo-période varie peu d'une oscillation à la suivante

Transformée de Fourier à Fenêtre (TFF)

On considère une “fenêtre” φ régulière et bien localisée (e.g. une gaussienne) La transformée de Fourier à fenêtre de f est

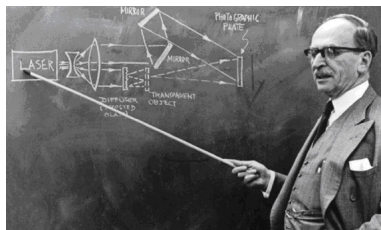
$$G_f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(t - x) e^{-2i\pi t \xi} dt$$

Transformée de Fourier à Fenêtre (TFF)

On considère une “fenêtre” φ régulière et bien localisée (e.g. une gaussienne) La transformée de Fourier à fenêtre de f est

$$G_f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(t - x) e^{-2i\pi t \xi} dt$$

Si $\|\varphi\|_2 = 1$, on a :
$$f(t) = \int \int G_f(x, \xi) e^{2i\pi \xi t} g(t - x) d\xi dx$$



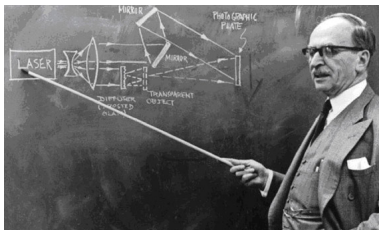
D. Gabor

Transformée de Fourier à Fenêtre (TFF)

On considère une “fenêtre” φ régulière et bien localisée (e.g. une gaussienne) La transformée de Fourier à fenêtre de f est

$$G_f(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(t - x) e^{-2i\pi t \xi} dt$$

Si $\|\varphi\|_2 = 1$, on a :
$$f(t) = \int \int G_f(x, \xi) e^{2i\pi \xi t} g(t - x) d\xi dx$$

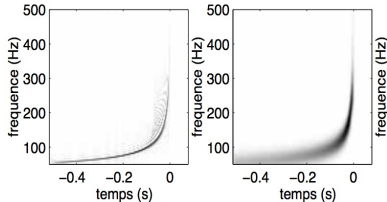
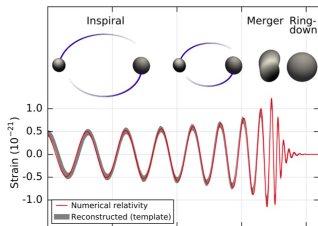


D. Gabor

Transformée de Wigner-Ville :

$$W(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) f\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\xi \tau} d\tau$$

TFF des ondes gravitationnelles



Wigner-Ville vs. STFT

$$\sim |t - t_0|^{-1/4} \cos(\omega|t - t_0|^{5/8} + \varphi)$$

P. Flandrin : **Explorations in Time-Frequency Analysis** (Cambridge U. P. 2018)



B. Torresani



P. Flandrin

Des bases temps fréquence ?

Les “logons” de Gabor : décomposer tout signal sur les fonctions

$$g(x - k) e^{2i\pi nx} \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{avec } g \text{ gaussienne})$$

Des bases temps fréquence ?

Les “logons” de Gabor : décomposer tout signal sur les fonctions

$$g(x - k) e^{2i\pi nx} \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{avec } g \text{ gaussienne})$$

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

est incomplet ou redondant, et n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

Des bases temps fréquence ?

Les “logons” de Gabor : décomposer tout signal sur les fonctions

$$g(x - k) e^{2i\pi nx} \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{avec } g \text{ gaussienne})$$

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

est incomplet ou redondant, et n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

Exemple de base orthonormée compatible avec le théorème de Balian-Low :

$$1_{[2k\pi, 2k+2\pi[}(x) e^{inx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

Des bases temps fréquence ?

Les “logons” de Gabor : décomposer tout signal sur les fonctions

$$g(x - k) e^{2i\pi nx} \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad (\text{avec } g \text{ gaussienne})$$

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

est incomplet ou redondant, et n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

Exemple de base orthonormée compatible avec le théorème de Balian-Low :

$$1_{[2k\pi, 2k+2\pi[}(x) e^{inx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

g est le sinus cardinal : $g(x) = \sin(x)/x$

Le système obtenu s'appelle les **fonctions de Wannier**

Des bases temps fréquence ?

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g_{k,l}(x) = g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

Des bases temps fréquence ?

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g_{k,l}(x) = g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

On peut relaxer le théorème de Balian-Low en ne supposant pas que les $g_{k,l}$ soient des translatées-modulées d'une même fonction :

J. Bourgain (1988) a construit une base $\psi_{n,m}$ telle que

$$\int |t - t_{n,m}|^2 |\psi_{n,m}(t)|^2 dt \leq C \quad \text{et} \quad \int |\xi - \xi_{n,m}|^2 |\widehat{\psi_{n,m}}(\xi)|^2 d\xi \leq C$$

Des bases temps fréquence ?

Le **théorème de Balian-Low** (1981) : Si

$$\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty \quad \text{et} \quad \int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

alors, tout système de la forme

$$g_{k,l}(x) = g(x - ak) e^{ibnx} \quad k, n \in \mathbb{Z}$$

n'est jamais une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$

On peut relaxer le théorème de Balian-Low en ne supposant pas que les $g_{k,l}$ soient des translatées-modulées d'une même fonction :

J. Bourgain (1988) a construit une base $\psi_{n,m}$ telle que

$$\int |t - t_{n,m}|^2 |\psi_{n,m}(t)|^2 dt \leq C \quad \text{et} \quad \int |\xi - \xi_{n,m}|^2 |\widehat{\psi_{n,m}}(\xi)|^2 d\xi \leq C$$

Théorème de T. Steger : Une base de Riesz $\psi_{n,m}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ne peut pas vérifier

$$\int |t - t_{n,m}|^2 |\psi_{n,m}(t)|^{2+\varepsilon} dt \leq C \quad \text{et} \quad \int |\xi - \xi_{n,m}|^2 |\widehat{\psi_{n,m}}(\xi)|^{2+\varepsilon} d\xi \leq C$$

principe d'incertitude "fort" pour les bases

Au-delà du théorème de Balian-Low

Comment sortir de l'impasse Balian-Low ?

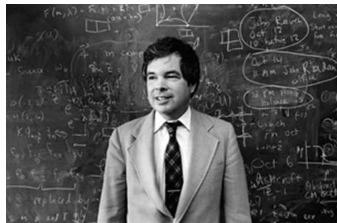
Au-delà du théorème de Balian-Low

Comment sortir de l'impasse Balian-Low ?

En 1987 **K. Wilson** (prix Nobel de physique) propose l'idée suivante :

Revenir à la définition d'un chirp

$$f(t) = \text{Re} (a(t)e^{i\varphi(t)})$$



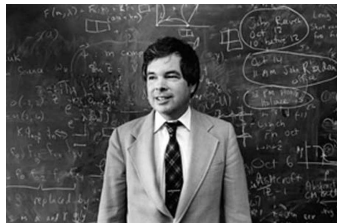
Au-delà du théorème de Balian-Low

Comment sortir de l'impasse Balian-Low ?

En 1987 [K. Wilson](#) (prix Nobel de physique) propose l'idée suivante :

Revenir à la définition d'un chirp

$$f(t) = \text{Re} (a(t)e^{i\varphi(t)})$$



Autoriser une double localisation en Fourier,
autour de deux fréquences opposées

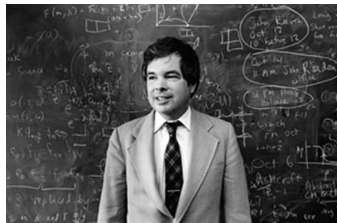
Au-delà du théorème de Balian-Low

Comment sortir de l'impasse Balian-Low ?

En 1987 [K. Wilson](#) (prix Nobel de physique) propose l'idée suivante :

Revenir à la définition d'un chirp

$$f(t) = \operatorname{Re} (a(t)e^{i\varphi(t)})$$



Autoriser une double localisation en Fourier,
autour de deux fréquences opposées

“Generalized Wannier functions”

$\psi_{n,m} = f_m(x - n)$ avec f_m “bien localisée” en espace

et $\hat{f}_m$ “bien localisée” autour de **deux fréquences opposées**

Les bases de Wilson

Les **bases de Wilson** (I. Daubechies, S. J., J.-L. Journé, 1991) sont des bases orthonormées de la forme :

$$\varphi_{0,n}(t) = \varphi(t - n) \quad n \in \mathbb{Z},$$

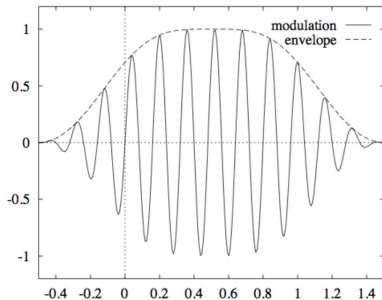
$$\varphi_{l,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi\left(t - \frac{n}{2}\right) \cos(2\pi lt) & \text{si } l + n \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{2}\varphi\left(t - \frac{n}{2}\right) \sin(2\pi lt) & \text{si } l + n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

Outil :

Transformée de Zak

Isométrie de $L^2(\mathbb{R})$

dans $L^2([-\pi, \pi]^2)$



Les bases de Wilson

$$\varphi_{0,n}(t) = \varphi(t - n) \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\varphi_{l,n}(t) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi\left(t - \frac{n}{2}\right) \cos(2\pi lt) & \text{si } l + n \in 2\mathbb{Z}, \\ \sqrt{2}\varphi\left(t - \frac{n}{2}\right) \sin(2\pi lt) & \text{si } l + n \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$

Condition nécessaire et suffisante pour engendrer une bases de Wilson :

$$\forall j \in \mathbb{Z} \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi - l) \hat{\varphi}(\xi - l - 2j) = \delta_{0,j}$$



I. Daubechies



J.-L. Journé († avril 2016)

Avantages des bases de Wilson

- ▶ φ and $\hat{\varphi}$ peuvent être simultanément à décroissance exponentielle

Avantages des bases de Wilson

- ▶ φ and $\widehat{\varphi}$ peuvent être simultanément à décroissance exponentielle
- ▶ On peut prendre $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\widehat{\varphi}$ à support compact (la fonction d'échelle de Meyer)

Avantages des bases de Wilson

- ▶ φ and $\widehat{\varphi}$ peuvent être simultanément à décroissance exponentielle
- ▶ On peut prendre $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\widehat{\varphi}$ à support compact (la fonction d'échelle de Meyer)
- ▶ Algorithmes de décomposition et recomposition rapides

Avantages des bases de Wilson

- ▶ φ and $\hat{\varphi}$ peuvent être simultanément à décroissance exponentielle
- ▶ On peut prendre $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\hat{\varphi}$ à support compact (la fonction d'échelle de Meyer)
- ▶ Algorithmes de décomposition et recomposition rapides
- ▶ Algorithmes de translation rapides

Avantages des bases de Wilson

- ▶ φ and $\hat{\varphi}$ peuvent être simultanément à décroissance exponentielle
- ▶ On peut prendre $\varphi \in \mathcal{S}$ et $\hat{\varphi}$ à support compact (la fonction d'échelle de Meyer)
- ▶ Algorithmes de décomposition et recomposition rapides
- ▶ Algorithmes de translation rapides

P. Auscher a trouvé
une condition équivalente
portant sur φ qui permet
d'obtenir des bases
de Wilson à support compact



Bases de Wilson et espaces fonctionnels

Caracterisation simple des **espaces de modulation** :

Si $C_{l,n} = \langle f | \varphi_{l,n} \rangle$,

$$f \in M_{\alpha}^{p,q} \text{ si } \left(\sum_n |C_{l,n}|^p \right)^{1/p} (1+l)^{\alpha} \in l^q$$



H. Feichtinger



K. Gröchenig

Bases de Wilson et espaces fonctionnels

Caracterisation simple des **espaces de modulation** :

Si $C_{l,n} = \langle f | \varphi_{l,n} \rangle$,

$$f \in M_{\alpha}^{p,q} \text{ si } \left(\sum_n |C_{l,n}|^p \right)^{1/p} (1+l)^{\alpha} \in l^q$$



H. Feichtinger



K. Gröchenig

La décomposition des ondes gravitationnelles est parcimonieuse dans une base de Wilson

Bases de Wilson et espaces fonctionnels

Caracterisation simple des **espaces de modulation** :

Si $C_{l,n} = \langle f | \varphi_{l,n} \rangle$,

$$f \in M_{\alpha}^{p,q} \text{ si } \left(\sum_n |C_{l,n}|^p \right)^{1/p} (1+l)^{\alpha} \in l^q$$



H. Feichtinger



K. Gröchenig

La décomposition des ondes gravitationnelles est parcimonieuse dans une base de Wilson

Conditions de parcimonie : Si c_n^* désigne le réarrangement décroissant des coefficients :

$$|c_n^*| \leq C/n^a$$

Les bases de Malvar

Autres bases orthonormées temps-fréquence

$$\varphi_{j,k}(t) = \varphi(t-j) \cos \left[\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) (t-j) \right]$$

H. Malvar



La **MDCT (Transformée Discrète en Cosinus Modifiée)** est utilisée dans tous les formats de compression audio, par exemple pour le format MP3 et le MPEG2 AAC

Les bases de Malvar

Autres bases orthonormées temps-fréquence

$$\varphi_{j,k}(t) = \varphi(t-j) \cos \left[\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) (t-j) \right]$$

H. Malvar



La **MDCT (Transformée Discrète en Cosinus Modifiée)** est utilisée dans tous les formats de compression audio, par exemple pour le format MP3 et le MPEG2 AAC

Extensions des bases de Wilson à des pavages temps-fréquence généraux (G. Kutyniok and T. Strohmer)

Les bases de Malvar

Autres bases orthonormées temps-fréquence

$$\varphi_{j,k}(t) = \varphi(t-j) \cos \left[\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) (t-j) \right]$$

H. Malvar



La **MDCT (Transformée Discrète en Cosinus Modifiée)** est utilisée dans tous les formats de compression audio, par exemple pour le format MP3 et le MPEG2 AAC

Extensions des bases de Wilson à des pavages temps-fréquence généraux (G. Kutyniok and T. Strohmer)

Des constructions qui unifient et généralisent les bases de Wilson et de Malvar ont été proposées par P. Auscher et ses collaborateurs

Les bases de Malvar

Autres bases orthonormées temps-fréquence

$$\varphi_{j,k}(t) = \varphi(t-j) \cos \left[\pi \left(k + \frac{1}{2} \right) (t-j) \right]$$

H. Malvar



La **MDCT (Transformée Discrète en Cosinus Modifiée)** est utilisée dans tous les formats de compression audio, par exemple pour le format MP3 et le MPEG2 AAC

Extensions des bases de Wilson à des pavages temps-fréquence généraux (G. Kutyniok and T. Strohmer)

Des constructions qui unifient et généralisent les bases de Wilson et de Malvar ont été proposées par P. Auscher et ses collaborateurs

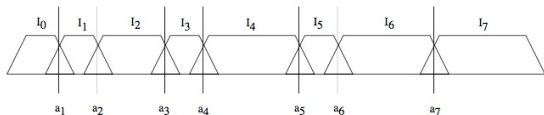
LTFAT :The Large Time-Frequency Analysis Toolbox

Bases de Malvar Adaptives



Bases de Malvar
avec une largeur
de fenêtre arbitraire

R. Coifman et Y. Meyer



$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{I_j}} \varphi_j(t) \cos \left[\frac{\pi}{I_j} \left(k + \frac{1}{2} \right) (t - a_j) \right]$$

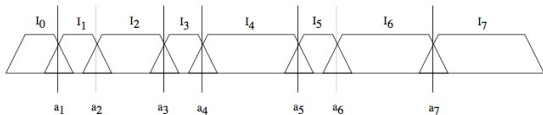


Bases de Malvar Adaptives



Bases de Malvar
avec une largeur
de fenêtre arbitraire

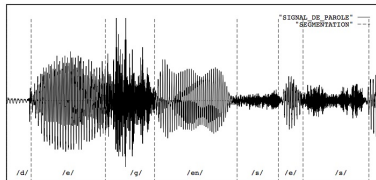
R. Coifman et Y. Meyer



$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{l_j}} \varphi_j(t) \cos \left[\frac{\pi}{l_j} \left(k + \frac{1}{2} \right) (t - a_j) \right]$$

Utilisées en segmentation de la parole
(séparation des phonèmes) :

V. Wickerhauser et E. Wesfreid



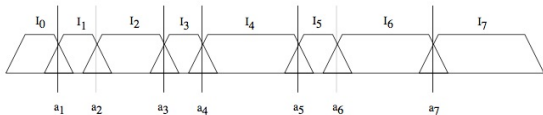
Credit : V. Wickerhauser and E. Wesfreid

Bases de Malvar Adaptives



Bases de Malvar
avec une largeur
de fenêtre arbitraire

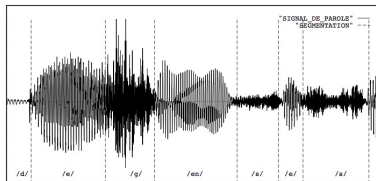
R. Coifman et Y. Meyer



$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{I_j}} \varphi_j(t) \cos \left[\frac{\pi}{I_j} \left(k + \frac{1}{2} \right) (t - a_j) \right]$$

Utilisées en segmentation de la parole
(séparation des phonèmes) :

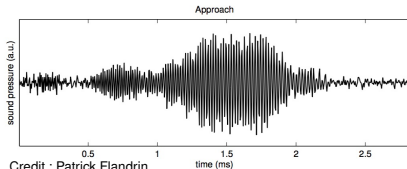
V. Wickerhauser et E. Westreid



Credit : V. Wickerhauser and E. Westreid

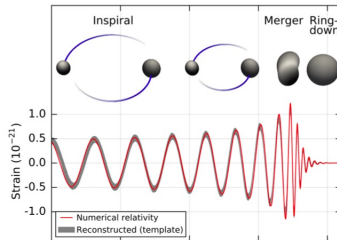
Ces constructions ont conduit aux dictionnaires redondants qui jouent
aujourd'hui un rôle clef en traitement du signal

Une variété de chirps

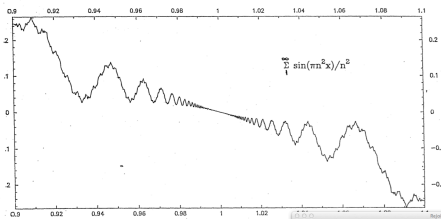


Credit : Patrick Flandrin

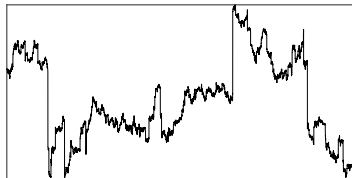
Ultrason émis par une chauve-souris



Onde gravitationnelle



$$\mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$



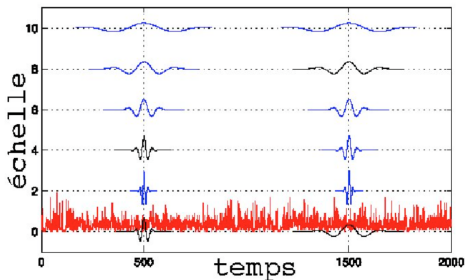
Processus de Lévy

$f(t) = \text{Re} \left(a(t) e^{i\varphi(t)} \right)$ La fréquence instantanée évolue lentement

Analyse temps-échelle (ondelettes)

Si l'ondelette ψ est bien localisée, d'intégrale nulle, paire ou impaire, la transformée continue en ondelettes d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est

$$C_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) dt$$



Analyse de Fourier locale : Deux approches

I : Analyse temps-échelle (ondelettes)

Formule de reconstruction : si

$$C_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi \left(\frac{t - b}{a} \right) dt$$

alors

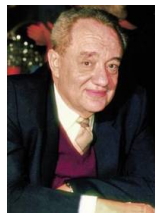
$$f(x) = C \int_{a>0} \int_{b \in \mathbb{R}} C_f(a, b) \psi \left(\frac{x - b}{a} \right) \frac{da db}{a^2}$$



A. Calderón



A. Grossmann



J. Morlet

Bases orthonormées d'ondelettes

Une **base d'ondelettes** sur $\mathbb{R}$ est engendrée par une fonction régulière, bien localisée, oscillante, ψ telle que les $2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$

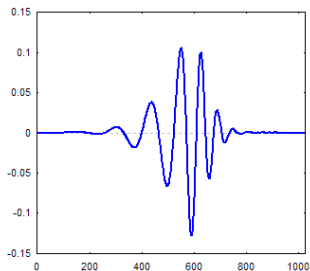
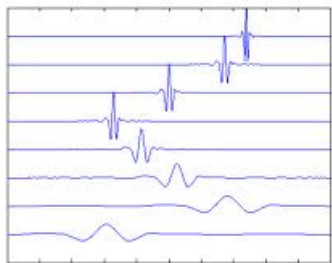
$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

avec

$$c_{j,k} = 2^{j/2} \int f(x) \psi(2^j x - k) dx$$

Exemple : $\psi = 1_{[0,1/2[} - 1_{[1/2,1[}$
(ondelette de Haar)



Ondelette de Daubechies

Bases orthonormées d'ondelettes

Avantages des base orthonormées d'ondelettes :

- ▶ Algorithmes de décomposition rapides
- ▶ Représentations parcimonieuses pour de grandes classes de signaux et d'images
- ▶ Caractérisation de “la plupart” de espaces fonctionnels utilisés en analyse (Sobolev, Besov, ...)



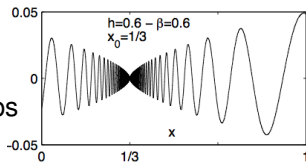
Yves Meyer Stéphane Mallat et Ingrid Daubechies

(24 mai 2017 : journée scientifique suite à la remise du prix Abel)

Les chirps vus comme des singularités ponctuelles

$$C_{H,\beta} = |x - x_0|^H \sin \left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta} \right)$$

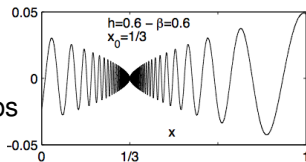
Caractérisation par ondelettes des chirps
(B. Torresani, Y. Meyer)



Les chirps vus comme des singularités ponctuelles

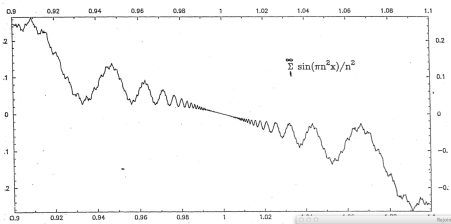
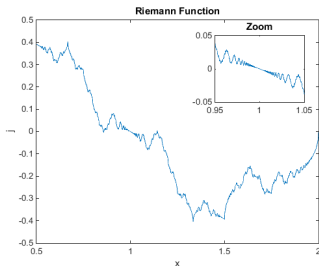
$$C_{H,\beta} = |x - x_0|^H \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right)$$

Caractérisation par ondelettes des chirps
(B. Torresani, Y. Meyer)



Chirp trigonometrique dans la série de Riemann
(Y. Meyer)

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$



$$\mathcal{R}(1+x) = -\frac{x}{2} + \sum_{k \geq 1} |x|^{k+1/2} g_k\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{avec} \quad g_k \sim \mathcal{R}(-k)$$

Régularité ponctuelle

$f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré $< \alpha$ tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

Régularité ponctuelle

$f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré $< \alpha$ tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

L' **exposant de Hölder** de f en x_0 est

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$$

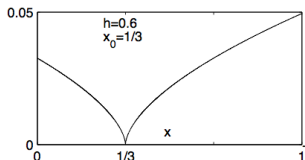
Régularité ponctuelle

$f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré $< \alpha$ tel que

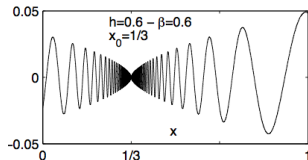
$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

L' **exposant de Hölder** de f en x_0 est

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$$



$$C_H = |x - x_0|^H$$



$$C_{H,\beta} = |x - x_0|^H \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right)$$

Les exposant de Hölder coïncident

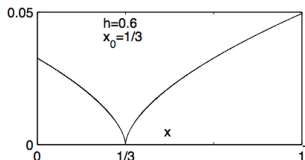
Régularité ponctuelle

$f \in C^\alpha(x_0)$ s'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré $< \alpha$ tel que

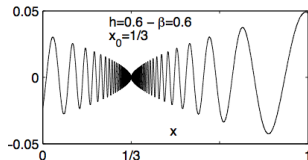
$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

L' **exposant de Hölder** de f en x_0 est

$$h_f(x_0) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(x_0)\}$$



$$C_H = |x - x_0|^H$$



$$C_{H,\beta} = |x - x_0|^H \sin\left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta}\right)$$

Les exposant de Hölder coïncident

Exposant de Hölder de la primitive $f^{(-1)}$:

$$h_{f^{(-1)}}(x_0) = H + 1$$

$$h_{f^{(-1)}}(x_0) = H + \beta + 1$$

Exposants associés aux chirps

(P. Abry, S. J., R. Leonarduzzi, C. Melot, H. Wendt)

Comment associer un exposant d'oscillations qui ne serait pas modifié par l'addition d'un bruit plus régulier ?

L'intégrée fractionnaire d'ordre s de f est

$$\widehat{f^{(-s)}}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \widehat{f}(\xi)$$

L'exposant de Hölder fractionnaire de f en x_0 est $h_f^s(x_0) = h_{f^{(-s)}}(x_0)$

Exposants associés aux chirps

(P. Abry, S. J., R. Leonarduzzi, C. Melot, H. Wendt)

Comment associer un exposant d'oscillations qui ne serait pas modifié par l'addition d'un bruit plus régulier ?

L'intégrée fractionnaire d'ordre s de f est

$$\widehat{f^{(-s)}}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \widehat{f}(\xi)$$

L'exposant de Hölder fractionnaire de f en x_0 est $h_f^s(x_0) = h_{f^{(-s)}}(x_0)$

f a une singularité oscillante en x_0 si $h_f^s(x_0) \neq h_f(x_0) + s$

Exposants associés aux chirps

(P. Abry, S. J., R. Leonarduzzi, C. Melot, H. Wendt)

Comment associer un exposant d'oscillations qui ne serait pas modifié par l'addition d'un bruit plus régulier ?

L'intégrée fractionnaire d'ordre s de f est

$$\widehat{f^{(-s)}}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \widehat{f}(\xi)$$

L'exposant de Hölder fractionnaire de f en x_0 est $h_f^s(x_0) = h_{f^{(-s)}}(x_0)$

f a une singularité oscillante en x_0 si $h_f^s(x_0) \neq h_f(x_0) + s$

Exposant d'oscillation : $\mathcal{O}_f(x_0) = \left(\frac{\partial h_f^s(x_0)}{\partial s} \right)_{s=0+} - 1$

- Prend la valeur β pour le chirp

$$C_{H,\beta} = |x - x_0|^H \sin \left(\frac{1}{|x - x_0|^\beta} \right)$$

- Prend la valeur 1 pour le chirp de Riemann

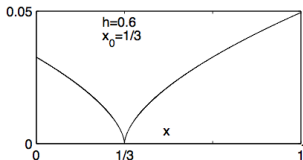
Cusps vs. Singularités oscillantes

Cusps

$$C_H(x) = |x - x_0|^H$$

une singularité cusp vérifie :

$$h_f^s(x_0) = h_f(x_0) + s$$



Un exemple de singularité cusps dans les ondes gravitationnelles :

T. Damour et A. Vilenkin, prédisent que les cordes cosmiques devraient émettre des ondes gravitationnelles ayant ce type de comportement

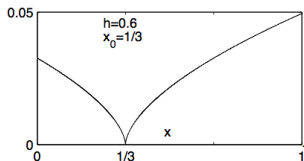
Cusps vs. Singularités oscillantes

Cusps

$$C_H(x) = |x - x_0|^H$$

une singularité cusp vérifie :

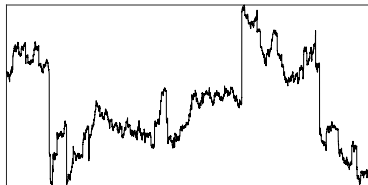
$$h_f^s(x_0) = h_f(x_0) + s$$



Un exemple de singularité cusps dans les ondes gravitationnelles :

T. Damour et A. Vilenkin, prédisent que les cordes cosmiques devraient émettre des ondes gravitationnelles ayant ce type de comportement

Trajectoire de processus de Lévy
(P. Balança)



Où sont les singularités oscillantes ???

Merci pour votre attention

