Outils temps-fréquence pour l'analyse des ondes gravitationnelles

Patrick Flandrin

CNRS & École normale supérieure de Lyon

Marseille, 11 oct. 2017

écouter GW150914

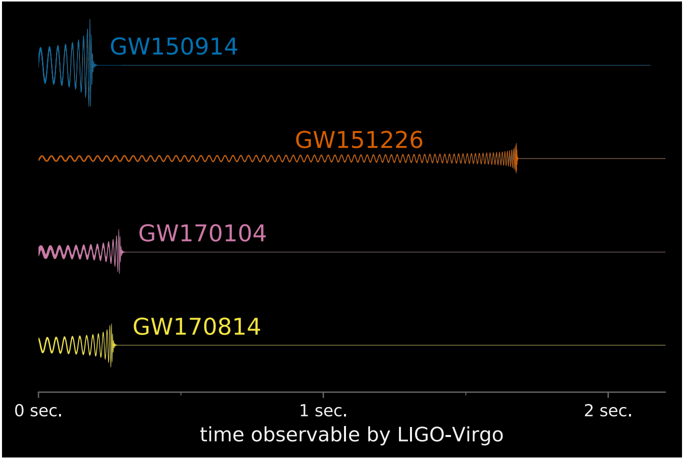
▷

bande originale

▷

transposé de 400 Hz

les 4 événements détectés



détecter/estimer

- **avec modèle**
  - “chirp” de forme connue, dépendant de paramètres physiques du système
  - filtrage adapté
- **sans modèle**
  - excès local d’énergie dans le plan temps-fréquence et coïncidence entre détecteurs
  - “Coherent Wave Burst” (S. Klimenko)

modèle simplifié pour les coalescences de binaires

- **“chirp”**

$$x(t; t_0, d) = A\,(t_0 - t)^{-1/4} \cos\left(2\pi\, d\,(t_0 - t)^{5/8} + \varphi\right) \mathbf{1}_{(-\infty, t_0[}(t),$$

avec :

  - t_0 instant de coalescence
  - $d \propto \mathcal{M}_\odot^{-5/8}$; $\mathcal{M}_\odot = (m_1 + m_2)^{2/5}(m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-3/5}/M_\odot$
    “chirp mass” réduite (rapportée à la masse solaire $M_\odot$)
  - $A \propto \mathcal{M}_\odot^{5/4}/R$; R distance terre-binaire

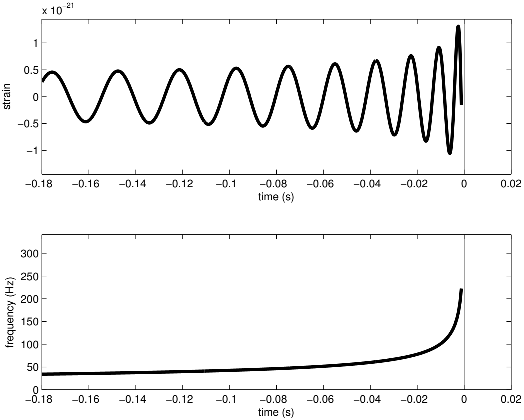
- **fréquence instantanée**

$$f_x(t) = \frac{5d}{8}\,(t_0 - t)^{-3/8}\,\mathbf{1}_{(-\infty, t_0[}(t)$$

- **limitation**
  - divergence lorsque $t \to t_0$ (chirp ? $\to$ exposé de S. Jaffard)
  - complétion par “ring down”

modèle simplifié pour les coalescences de binaires

- exemple inspiré de GW150914 :
  - masses individuelles de 30 $M_\odot$
  - distance de 800 Mpc



chirps et temps-fréquence

- **interprétation**
  - chirp = trajectoire dans le plan temps-fréquence
- **représentations localisées ?**
  - solution exacte pour les chirps en lois de puissance [Bertrand & Bertrand, '88] mais :
    - représentation quadratique (à la Wigner)
    - calcul prohibitif
  - solution approchée
    - spectrogramme réalloué [Kodera *et al.*, '76; Auger & F., '95, Chassande-Mottin & F., '99]
  - autres
    - ondelettes [Innocent & Torresani, '97]
    - "synchrosqueezing" [Daubechies & Maes, '94]

chirps et temps-fréquence

- **interprétation**
  - chirp = trajectoire dans le plan temps-fréquence
- **représentations localisées ?**
  - solution exacte pour les chirps en lois de puissance [Bertrand & Bertrand, '88] mais :
    - représentation quadratique (à la Wigner)
    - calcul prohibitif
  - solution approchée
    - spectrogramme réalloué [Kodera *et al.*, '76; Auger & F., '95, Chassande-Mottin & F., '99]
  - autres
    - ondelettes [Innocent & Torresani, '97]
    - "synchrosqueezing" [Daubechies & Maes, '94]

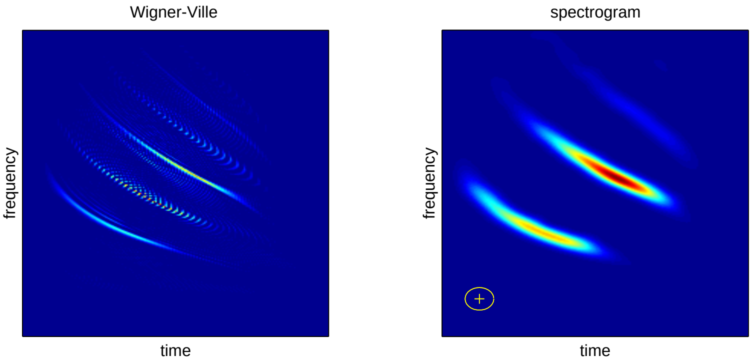
“revisiter” le spectrogramme

- **classiquement**
  - spectrogramme = $|\mathrm{TFCT}|^2$
  - TFCT = $\langle x, \mathbf{T}_{t,f} h\rangle$, avec h fenêtre à court-terme et $\mathbf{T}_{t,f}$ opérateur de translation temps-fréquence
- **de façon alternative**
  - spectrogramme = $\iint W_x(s,\xi) W_h(s-t,\xi-f)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\xi$
  - W distribution de Wigner(-Ville) = $\langle x, \Pi_{t,f} x\rangle$, avec $\Pi_{t,f}$ opérateur de parité locale
- **interprétation**
  - spectrogramme = Wigner lissée
  - W parfaitement localisée sur les chirps linéaires unimodulaires
  - h gaussienne $\Rightarrow$ W_h à lissage minimal dans le plan

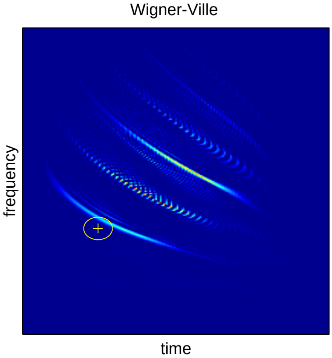
corollaire

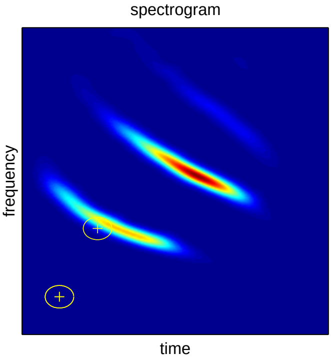
- **analogie mécanique**
  - distribution d'énergie par $W_x \sim$ distribution de masse
  - spectrogramme = masse totale sur le support de W_h
  - valeur affectée au centre géométrique de la cellule de lissage
- **principe de réallocation** [Kodera *et al.*, '76]
  - réaffecter la valeur au centre de gravité
  - information contenue dans la phase de la TFCT
- **en pratique** [Auger & F., '95]
  - calcul implicite des centres de gravité locaux en utilisant 3 TFCT basées sur $h(t)$, $t\,h(t)$ et $(\mathrm{d}h/\mathrm{d}t)(t)$
  - codes Matlab disponibles à `tftb.nongnu.org`

réallocation

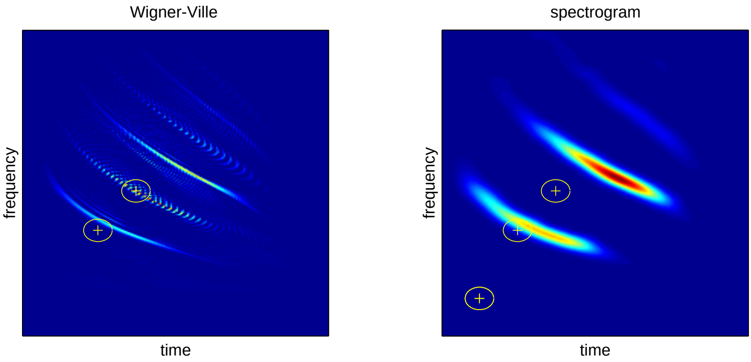


réallocation

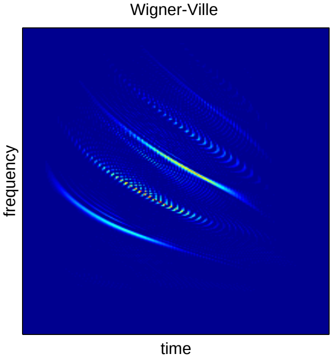


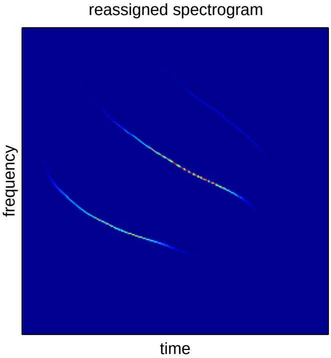


réallocation

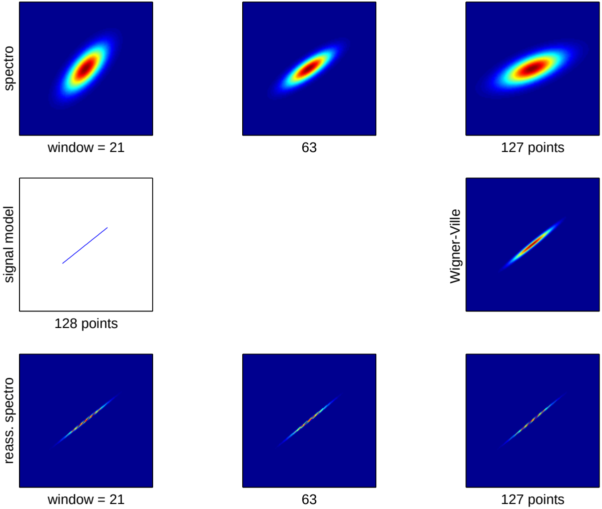


réallocation

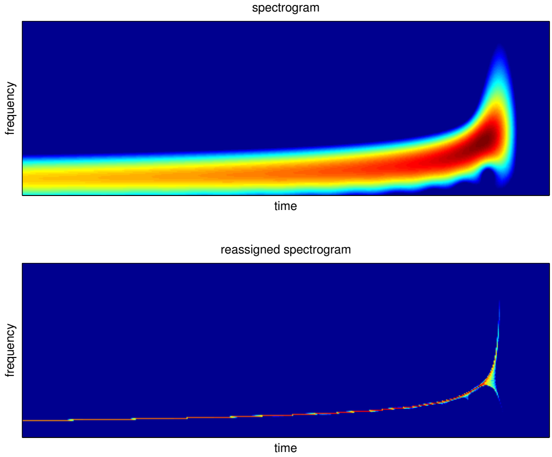




quelle fenêtre ?



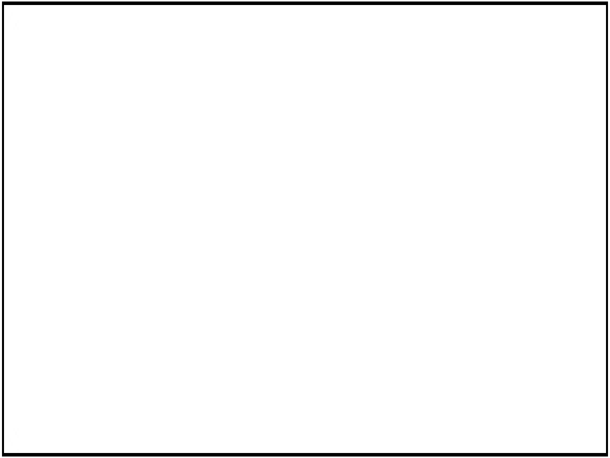
retour sur le modèle inspiré de GW150914



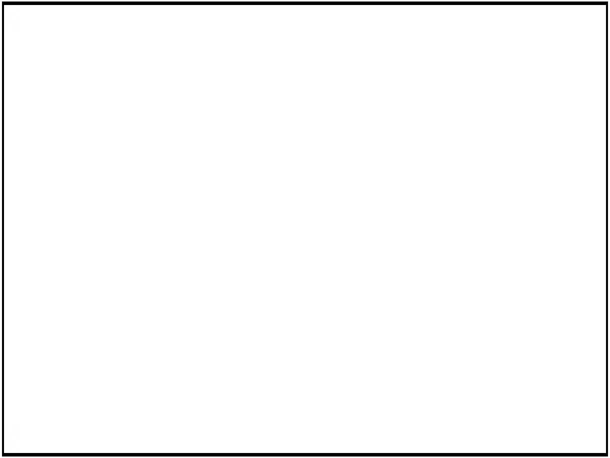
analyse avec modèle : filtrage adapté

- **hypothèses**
  - structure imposée (filtrage linéaire)
  - signal connu dans bruit blanc
- **optimalité**
  - mesure de contraste = SNR en sortie du filtre
  - réponse impulsionnelle = signal retourné dans le temps
- **en pratique**
  - détection : corrélation observation-signal attendu + seuil
  - estimation : autant de gabarits que de paramètres

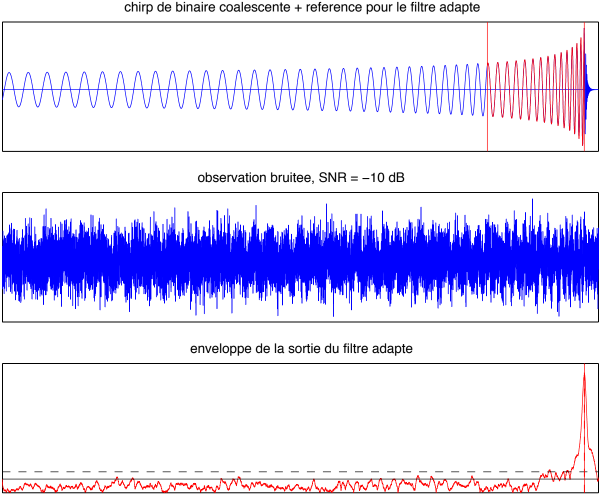
filtrage adapté (sans bruit)



filtrage adapté (avec bruit)



filtrage adapté et modèle simplifié



filtrage adapté temps-fréquence

- **choix d'une distribution temps-fréquence ρ idéalement**
  - unitaire : $|\langle x, r\rangle|^2 = \langle\langle \rho_x, \rho_r\rangle\rangle$
  - localisée : $\rho_r(t,f) = a_r^2(t)\,\delta(f - f_r(t))$
- **stratégie approchée** [Chassande-Mottin & F., '99]
  - $\rho = \tilde{S}$, spectrogramme réalloué
  - filtrage adapté = intégration de chemin dans le plan temps-fréquence
- **pour le modèle simplifié à 2 paramètres t_0 et $\mathcal{M}_\odot$**

$$(\hat{t}_0, \hat{\mathcal{M}}_\odot) = \arg \max_{(t_0, \mathcal{M}_\odot)} \int_{\mathcal{L}(t_0, \mathcal{M}_\odot)} \tilde{S}_y(t,f)\, f^{-2/3},$$

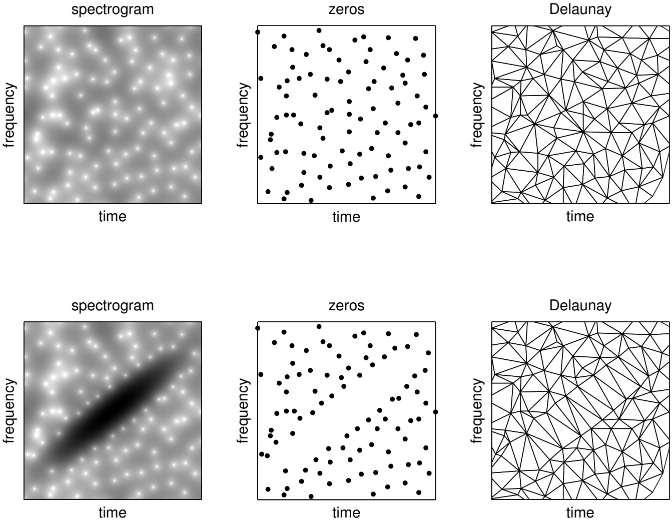
avec

$$\mathcal{L}(t_0, \mathcal{M}_\odot) = \left\{ (t,f) \mid t_0 - t = 6.35 \times 10^5\, \mathcal{M}_\odot^{-5/3}\, f^{-8/3} \right\}.$$

analyse sans modèle : une vue *a contrario*

- **approche usuelle à l'idée de composante**
  - s'intéresser aux grandes valeurs temps-fréquence
  - leur associer une organisation cohérente
- **alternative** [F., '15]
  - s'intéresser aux minima plutôt qu'aux maxima
  - identifier des domaines entre zéros
- **substrat théorique**
  - transformée de Bargmann et factorisation de Weierstrass-Hadamard
  - propriétés des zéros des "Gaussian Analytic Functions" [Hough *et al.*, '09]

triangulation de Delaunay basée sur les zéros

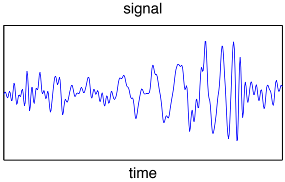


Algorithme [F., '15]

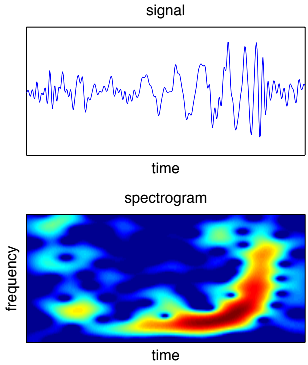
1. Calculer la **TFCT à fenêtre gaussienne circulaire** $F_x^{(g)}(t,f)$ et le spectrogramme associé
2. Localiser les **zéros du spectrogramme**
3. Calculer la **triangulation de Delaunay** associée
4. Identifier les triangles **anormaux** % longueur des côtés
5. Garder les triangles avec **au moins un côté anormal**
6. Former des **domaines connexes** $\mathcal{D}_j$ avec de tels triangles adjacents
7. **Reconstruire** les composantes correspondantes selon, par exemple,

$$x_j(t) = \frac{1}{g(0)} \int_{f \in \mathcal{D}_j | t} F_x^{(g)}(t,f) \, \mathrm{d}f$$

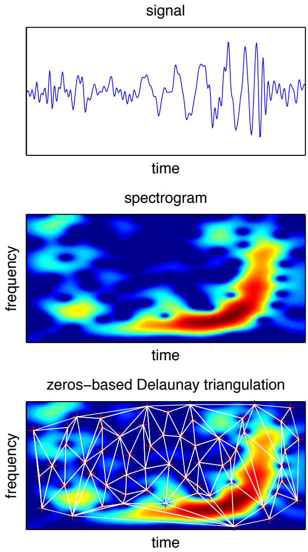
chirp de GW10914 (Hanford)



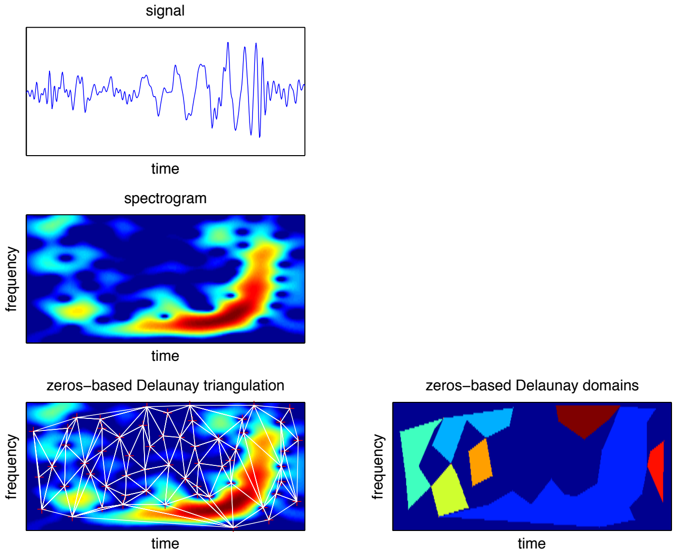
spectrogramme



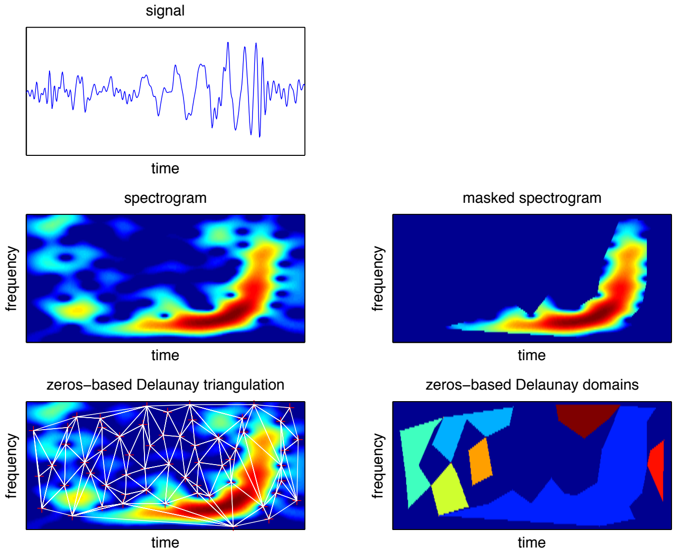
zéros et triangulation de Delaunay



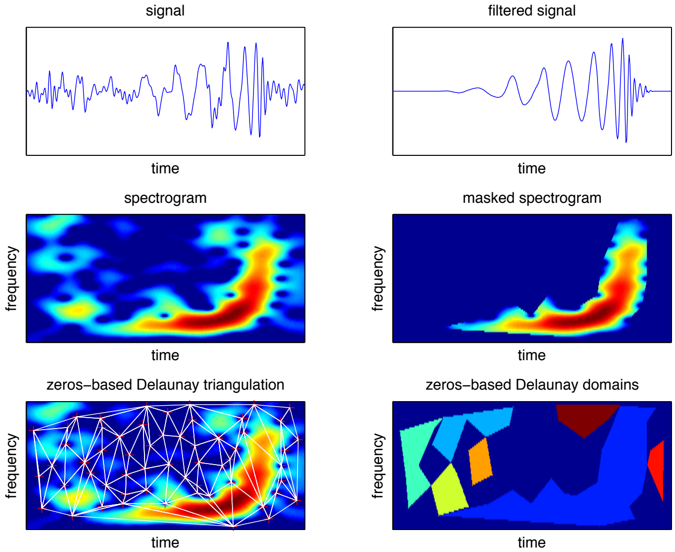
domaines temps-fréquence



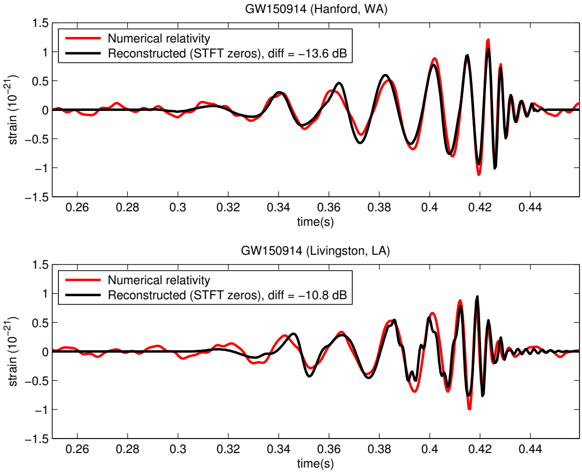
spectrogramme masqué 1/0



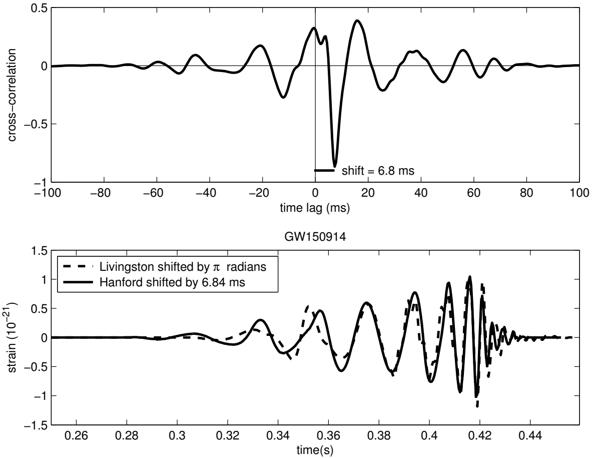
reconstruction filtrée



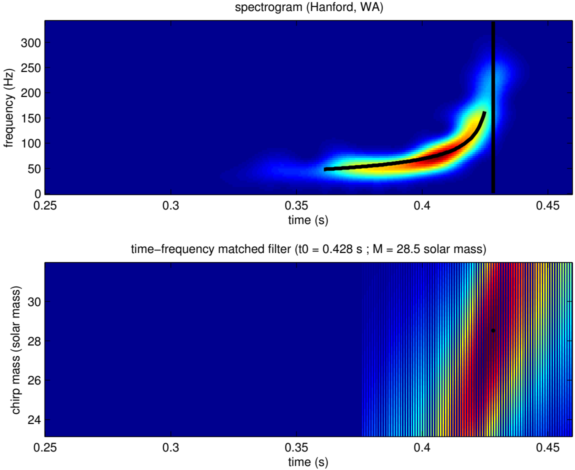
observations filtrées vs. modèles (élaborés)



de Livingston à Hanford

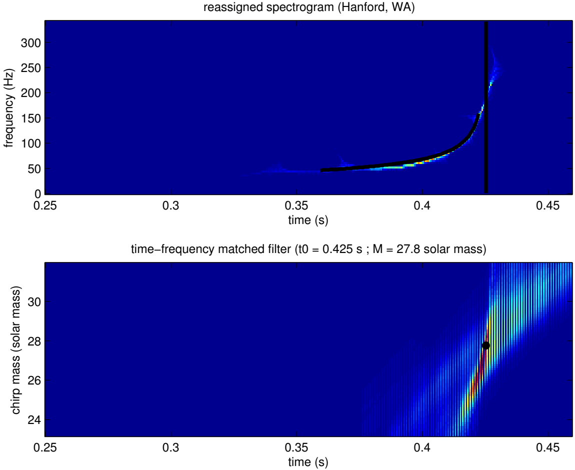


filtrage adapté temps-fréquence



([Abbott *et al.*, '16] : $m_1 = 36$ et $m_2 = 29 \Rightarrow \mathcal{M}_\odot = 28$)

filtrage adapté temps-fréquence



([Abbott *et al.*, '16] : $m_1 = 36$ et $m_2 = 29 \Rightarrow \mathcal{M}_\odot = 28$)

pour conclure

- **temps-fréquence**
  - espace “naturel” pour les chirps d’ondes gravitationnelles
  - possibilités de détection et d’estimation
  - faisabilité conceptuelle mais beaucoup reste à faire
- **quelques références**

  - E. Chassande-Mottin, P. Flandrin, “On the time-frequency detection of chirps,” *Appl. Comp. Harm. Anal.*, Vol. 6, No. 2, pp. 252–281, 1999.
  - P. Flandrin, F. Auger, and E. Chassande-Mottin, “Time-frequency reassignment — From principles to algorithms,” in *Applications in Time-Frequency Signal Processing* (A. Papandreou-Suppappola, ed.), Chapter 5, pp. 179–203, Boca Raton, FL: CRC Press, 2003.
  - P. Flandrin, , “Time-frequency filtering from spectrogram zeros,” *IEEE Signal Proc. Lett.*, Vol. 22, No. 11, pp. 2137–2141, 2015.
  - P. Flandrin, “A note on the time-frequency analysis of GW150914,” Research report, `https://hal-ens-lyon.archives-ouvertes.fr/ ensl-01370441`, 2016.
  - P. Flandrin, *Explorations in Time-Frequency Analysis*, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, à paraître 2018.

- **(p)reprints et contact**

  - `perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin`
  - `flandrin@ens-lyon.fr`