
CONTRÔLE CONTINU 2 - SUJET A-EXCLUSIVEMENT AUTORISÉ : 1 FEUILLE A4

Question de cours

Donner la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y .

Exercice 1.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles qui a pour densité

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-3x} & \text{si } 0 < y < x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $k > 0$ pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y .
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la corrélation de X et Y .
5. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(Y \geq X)$?
6. On pose $Z = Y/X$. Déterminer la loi de Z .
On distinguera les cas où $Z \leq 0$, $Z \geq 1$, et $0 < Z < 1$.

Exercice 2.

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien d'espérance $\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de matrice de variance-covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. On pose $U = X_1 + 2X_2 - X_3$ et $V = X_1 - X_2 + X_3$. Donner la loi du couple (U, V) .
2. Trouver une matrice A de taille 3×3 telle que le vecteur aléatoire défini par $Y = AX = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ vérifie que Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes. Préciser la loi de Y .

Exercice 3.

En 1955 Wechler a proposé de mesurer le quotient intellectuel (QI) des adultes et a proposé un test fondé sur les compétences tant verbales que non verbales. Le test est fait de telle sorte qu'on peut supposer que le QI d'une personne d'âge donné suit une loi normale d'espérance 100 et de variance 15^2 .

1. Quelle est la probabilité que cette personne ait un QI inférieur à 80 ?

2. Quelle est la probabilité que cette personne ait un QI compris entre 105 et 110 ?
3. Quel score minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?