Exercice 1

1. On calcule $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{y} ke^{-4y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} ke^{-4y}\left(\int_0^{y} dx\right) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} ke^{-4y}\, y\,dy$$

$$= k\int_0^{+\infty} ye^{-4y}\,dy$$

$$= k\left(\left[\frac{ye^{-4y}}{-4}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-4y}}{-4}\,dy\right)$$

$$= k\left[0 + \frac{1}{4}\times\left[\frac{e^{-4y}}{-4}\right]_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{k}{16}$$

On doit avoir $\frac{k}{16} = 1$ d'où $\boxed{k = 16}$

2. Pour calculer la marginale de X on écrit $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

· si $x > 0$ $f_X(x) = \int_x^{+\infty} ke^{-4y}\,dy$

$$= 16\times\left[\frac{e^{-4y}}{-4}\right]_x^{+\infty} = 4e^{-4x}$$

· si $x \leq 0$ $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dy = 0$

B ②

donc $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 4e^{-4x} & \text{si } x > 0 . \end{cases}$

Pour calculer la marginale de Y on écrit $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

· si $y > 0$ $f_Y(y) = \int_0^y k e^{-4y}\,dx$

$$= 16 y e^{-4y}$$

· si $y \leq 0$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,dx$ car $f(x,y) = 0$ si $y \leq 0$

d'où $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 16 y e^{-4y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

3. on cherche à voir si $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ pour savoir si X et Y sont indépendants

on $f(x,y) = 0$ si $x > y$

par exemple $y = 1$ et $x = 2$

$f_X(2) = 4e^{-8} \neq 0$

$f_Y(1) = 16e^{-4} \neq 0$

· donc on ne peut avoir l'égalité $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

et X et Y ne sont pas indépendants.

4. $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

on a $\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^y xy k e^{-4y}\,dx\,dy$$

B 3

$$\mathbb{E}(XY) = k\int_0^{+\infty} y e^{-4y} \int_0^{y} x\,dx$$

$$= k\int_0^{+\infty} y e^{-4y}\left[\frac{y^2}{2} - 0\right] dy$$

$$= \frac{k}{2}\int_0^{+\infty} y^3 e^{-4y}\,dy$$

Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^3 e^{-4y}\,dy = \left[\frac{y^3}{-4}e^{-4y}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} 3y^2 e^{-4y}\,dy$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y}\,dy \quad (1)$$

$$\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y}\,dy = \left[\frac{y^2}{-4}e^{-4y}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} 2y e^{-4y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y e^{-4y}\,dy \quad (2)$$

$$\int_0^{+\infty} y e^{-4y}\,dy = \left[\frac{y e^{-4y}}{-4}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} e^{-4y}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\times\left[\frac{e^{-4y}}{-4}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{16} \quad (3)$$

d'où (2) vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y}\,dy = \frac{1}{32}$

(1) vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} y^3 e^{-4y}\,dy = \frac{3}{4}\times\frac{1}{32}$

$$= \frac{3}{128}$$

donc $\displaystyle\mathbb{E}(XY) = \frac{16}{2}\times\frac{3}{4\times 32} = \frac{\cancel{16}\times 3}{\cancel{2}\times\cancel{4}\times\cancel{2}\times 16} = \frac{3}{16}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 4xe^{-4x}\,dx$$

$$= 4\int_0^{+\infty} xe^{-4x}\,dx$$

or d'après (3) on a $\int_0^{+\infty} xe^{-4x}\,dx = \int_0^{+\infty} ye^{-4y}\,dy = \frac{1}{16}$

d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0 y \times 16 y e^{-4y}\,dy$$

$$= 16\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y}\,dy$$

or $\int_0^{+\infty} y^2 e^{-4y}\,dy = \frac{1}{32}$ d'après ce calcul à faire

donc $\mathbb{E}(Y) = 16 \times \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$

d'où $\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} - \frac{2}{16}$

$$= \frac{1}{16} \neq 0.$$

5. on a $f(x,y) = 0$ si $x \geqslant y$.

on pose $D = \{(x,y) \mid x \geqslant y\}$

$$\mathbb{P}(Y \leqslant X) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

6. $Z = \frac{X}{Y}$ Déterminons la fonction de répartition de Z

Calculons $\mathbb{P}(Z \leq t) = F_Z(t)$

Remarquons que si $x \leq 0$ ou $y \leq 0$ $f(x,y) = 0$

donc $\mathbb{P}(Y \leq 0) = \iint_{y \leq 0} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

de même $\mathbb{P}(X \leq 0) = \iint_{x \leq 0} f(x,y)\,dx\,dy = 0$

d'où avec probabilité 1 $X > 0$ et $Y > 0$ et donc $Z = \frac{X}{Y} > 0$

en particulier

- si $t < 0$ $\quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(Z \leq t < 0) = 0$

- si $t \geq 1$ $\quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} \leq t\right) = \mathbb{P}(X \leq tY)$

si $Y \leq X$ alors $\mathbb{P}(Y \leq X) = 0$

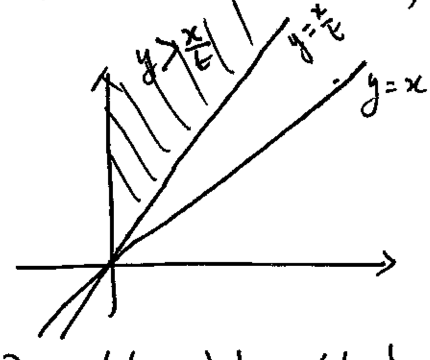
donc $\quad \mathbb{P}(Y > X) = 1$ car c'est l'événement contraire.

si $X < Y$ alors $X < Y \leq tY$ avec $t \geq 1$ d'où $X \leq tY$

d'où $\quad \mathbb{P}(X < Y) \leq \mathbb{P}(X \leq tY)$

or $\mathbb{P}(X < Y) = 1$ donc $\mathbb{P}(X \leq tY) = 1$

- si $t < 1$ $\quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(X \leq tY)$



on pose $D_t = \{(x,y) \mid x \leq ty\}$ donc $D_t = \{(x,y) \mid \frac{x}{t} \leq y\}$

d'où $\mathbb{P}(Z \leq t) = \iint_{D_t} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{ty} ke^{-4y}\,dx\,dy$

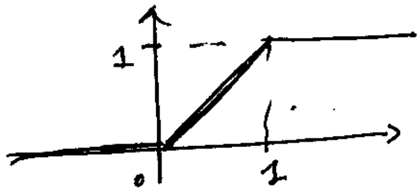
$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \int_0^{+\infty}\int_0^{ty} k e^{-4y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{+\infty} k \times t y e^{-4y}\,dy$$

$$= k t \int_0^{+\infty} y e^{-4y}\,dy$$

$$F_Z(t) = 16 t \times \frac{1}{16} = t$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } & t \leq 0 \\ t \text{ si } & 0 \leq t < 1 \\ 1 \text{ si } & t \geq 1 \end{cases}$$



Exercice 2: $\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

1. on a $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

on pose $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

Comme $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ suit 1 loi de vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mu, \Gamma)$

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ suit donc 1 loi de vecteur gaussien $\mathcal{N}(A\mu, A\Gamma{}^tA)$
car c'est 1 transformation linéaire d'un vecteur gaussien.
Ce qui donne donc

$$\mu' = A\mu = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma' = A\Gamma{}^tA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

2. on veut $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ indépendants et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ transformation

linéaire du vecteur gaussien $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$.

donc Y sera un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu_Y, \Gamma_Y)$ avec

$$\mu_Y = A\mu$$
$$\Gamma_Y = A\Gamma{}^tA$$

B (8)

On cherche donc un Q tel que Γ_Y est la matrice de corrélation de Y à avoir Γ_Y diagonale.

Si Γ_Y est diagonale, cela signifie que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont décorrélées, et comme Y est un vecteur gaussien, cela signifie en fait qu'elles sont indépendantes.

Donc on cherche à avoir A pour avoir Γ_Y diagonale.

Cherchons donc à diagonaliser Γ dans une base orthonormée.

Cherchons les valeurs propres de Γ

Calculons $P(X) = \det(\Gamma - X\,Id)$

$$= \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 0 \\ 0 & 5-X & 1 \\ 0 & 1 & 5-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X) \begin{vmatrix} 5-X & 1 \\ 1 & 5-X \end{vmatrix}$$

$$= (3-X)\left[(5-X)^2 - 1\right]$$

$$= (3-X)(4-X)(6-X)$$

on a donc $\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 6$ B 9

• pour $\lambda_1 = 3$ on a $\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à λ_1

d'où $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} 3x = 3x \leftarrow \text{toujours vérifiée} \\ 5\cancel{y} + \cancel{z} = 3\cancel{y} \\ y + 5z = 3z \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ -2y = z \\ y - 10y = -6y \end{cases} \quad \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

d'où un vecteur propre associé à λ_1 est $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• pour $\lambda_2 = 4$ $\Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x = 4x \\ 5\cancel{y} + \cancel{z} = 4y \\ y + 5z = 4z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = -z \\ y = -z \end{cases}$ d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

un vecteur propre associé à λ_2 est $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2$

on norme ce vecteur $\frac{u_2}{\|u_2\|}$ en calculant

$\|u_2\|^2 = 1 + 1 = 2$ d'où $\|u_2\| = \sqrt{2}$

ce qui donne $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

· pour $\lambda_3 = 6$ $\quad \Gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x = 6x \\ 5y + z = 6y \\ \cancel{z}\, y + 5z = 6z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ z = y \end{cases} \qquad \text{d'où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

est donc un vecteur propre associé à λ_3 est $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|u_3\|^2 = 1 + 1 = 2$

d'où $\|u_3\| = \sqrt{2}$

d'où $\frac{u_3}{\|u_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

une base orthonormée de vecteurs propres est donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

on $P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} {}^tP = \Gamma$

et donc

en posant $A = {}^tP$

on a vu que $P\,{}^tP = Id$

$$A\Gamma\,{}^tA = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

et A est donc la matrice que l'on cherche.

3. la loi de Y est donc la loi d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(A\mu, A\Gamma\,{}^tA)$

or $A\mu = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \cancel{0} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$

$A\mu = \begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ et $A\Gamma\,{}^tA = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

Exercice 3:

1. on pose X la variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(100, 15^2)$ qui mesure le QI

$$\mathbb{P}(X \geqslant 120) = \mathbb{P}\left(\frac{X-100}{15} \geqslant \frac{120-100}{15}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{20}{15}\right) \text{ avec } Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

or $\mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{20}{15}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(Y \leqslant \frac{20}{15}\right)$

d'où $\mathbb{P}\left(Y \geqslant \frac{20}{15}\right) \simeq 1 - 0{,}9082$
$\simeq 0{,}0918$

2. $\mathbb{P}(90 \leq X \leq 95)$ B 12.

$= \mathbb{P}\left(\frac{90-100}{15} \leq \frac{X-100}{15} \leq \frac{95-100}{15}\right)$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{10}{15} \leq \frac{X-100}{15} \leq \frac{-5}{15}\right)$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq \frac{X-100}{15} \leq -\frac{1}{3}\right)$

$= \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq Y \leq -\frac{1}{3}\right)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= \mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{1}{3}\right) - \mathbb{P}\left(Y \leq -\frac{2}{3}\right)$

$= \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{1}{3}\right) - \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{2}{3}\right)$

$= 1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{2}{3}\right)\right)$

$= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{2}{3}\right) - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{1}{3}\right)$

$= 0,7454 - 0,6293$

$= 0,1161$

3. $\mathbb{P}(X \leq t) \simeq 0,05$

d'où $\mathbb{P}\left(\frac{X-100}{6} \leq \frac{t-100}{6}\right) \simeq 0,05$

$\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{t-100}{15}\right) \simeq 0,05$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}\left(Y \geq \frac{-t+100}{15}\right) \simeq 0,05$

$1 - \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{100-t}{15}\right) \simeq 0,05$

d'où $\mathbb{P}\left(Y \leq \frac{100-t}{15}\right) \simeq 0,95$

donc $\frac{100-t}{15} \simeq 1,65$ d'où $t = 100 - 1,65 \times 15$

$\boxed{t \simeq 75,250}$