Correction des exercices de révision sur l'intégration et les intégrales généralisées

Notations et définitions

— $\mathbf{1}_A$ indique que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon avec A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

— Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a,b[$. On note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que $\int_a^b f(x)dx$ existe si $\lim\limits_{x\to b} F(x)$ existe et on a $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{x\to b} F(x) - F(a)$.

Intégration : intégration par parties et changement de variables

Exercice 1. Intégrations par partie

Calculer à l'aide d'intégrations par partie les intégrales classiques suivantes, en ayant auparavant justifié que la fonction f sous l'intégrale est bien intégrable sur l'intervalle concerné.

1. Pour I_1 on intégre e^{-x} et on dérive x

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}dx \\
&= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
&= e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1
\end{aligned}$$

2. On intégre x^2 et on dérive $\ln(x)$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_1^2 x^2 \ln(x)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx = \frac{8\ln(2)}{3} - \int_1^2 \frac{x^2}{3}dx \\
&= \frac{8\ln(2)}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 \\
&= \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

3. Pour I_2 on intégre $\cos(3x)$ et on dérive x

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 x\cos(3x)dx \\ &= \left[\frac{\sin(3x)x}{3}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(3x)}{3}dx \\ &= \frac{\sin(3)}{3} - \left[\frac{-\cos(3x)}{9}\right]_0^1 \\ &= \frac{\sin(3)}{3} + \frac{\cos(3)}{9} - \frac{1}{9} \end{aligned}$$

4. Pour I_4 on intégre $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et on dérive $\ln(x)$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\sqrt{x}}{x}dx \\ &= 2\ln(2)\sqrt{2} - \left[4\sqrt{x}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2)\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 \end{aligned}$$

5. Pour I_5 on intégre 1 et on dérive $\arctan(x)$

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \arctan(x)dx \\ &= [x\arctan(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

6. Pour I_6 on intégre 1 et on dérive $\ln(1+x^2)$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\ &= \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{2x^2+2-2}{1+x^2}dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 2 - \frac{2}{1+x^2}dx \\ &= \ln(2) - 2 + 2\left[\arctan(x)\right]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2 + 2\frac{\pi}{4} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2. Deux intégrations par parties

A l'aide d'au moins deux intégrations par parties calculer $\int_0^1 e^x \cos(x)dx$

On écrit, en intégrant e^x et en dérivant $\cos(x)$, puis de nouveau en intégrant e^x et en dérivant sin

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x\cos(x)dx &= [e^x\cos(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x(-\sin(x))dx \\
&= e\cos(1) - 1 + \int_0^1 e^x\sin(x)dx \\
&= e\cos(1) - 1 + [e^x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 e^x\cos(x)dx \\
\int_0^1 e^x\cos(x)dx &= e\cos(1) - 1 + e\sin(1) - \int_0^1 e^x\cos(x)dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

On reconnait qu'à droite et à gauche dans l'inégalité (1) on a $\int_0^1 e^x\cos(x)dx$. On a donc, en passant à gauche de (1) $-\int_0^1 e^x\cos(x)dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^x\cos(x)dx + \int_0^1 e^x\cos(x)dx &= e\cos(1) - 1 + e\sin(1) \\
2\int_0^1 e^x\cos(x)dx &= e\cos(1) - 1 + e\sin(1) \\
\int_0^1 e^x\cos(x)dx &= \frac{e\cos(1) - 1 + e\sin(1)}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 3. **Changement de variables**

A l'aide d'un changement de variables calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \qquad I_2 = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx \qquad I_4 = \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx$$

1. On pose pour I_1

$$\left\{\begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2dx \\ \text{Quand } x = 0 \quad , \quad t = 0 \\ \text{Quand } x = 1 \quad , \quad t = 1 \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+t}}{3}dt \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{(1+t)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{9}(2^{3/2} - 1)
\end{aligned}$$

2. On pose pour I_2

$$\begin{cases} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)dx \\ \text{Quand } x = 0 \quad , \quad t = 1 \\ \text{Quand } x = \pi \quad , \quad t - 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx \\ &= \int_1^{-1} \frac{-1}{1+t^2}dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= [\arctan(t)]_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. On pose donc $t = e^x$, ce qui donne pour I_3

$$\begin{cases} t = e^x & \\ dt = e^x dx & \text{donc } dx = e^{-x}dt\text{, c'est à dire } dx = \frac{dt}{t} \\ \text{Quand } x = 0 & , \quad t = 1 \\ \text{Quand } x = 1 & , \quad t = e \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{e^x e^x}{e^x+1}dx \\ &= \int_1^e \frac{t}{1+t}dt \\ &= \int_1^e \frac{t+1-1}{1+t}dt \\ &= \int_1^e 1 - \frac{1}{1+t}dt \\ &= [t - \ln(1+t)]_1^e \\ &= e - 1 - \ln(1+e) + \ln(2) \end{aligned}$$

4. On pose donc pour I_4

$$\begin{cases} t = \sqrt{e^x - 1} & \text{donc } t^2 = e^x - 1 \text{ et donc } e^x = t^2 + 1 \\ dt = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx & \text{donc } dx = \frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}dt\text{, c'est à dire } dx = \frac{2t}{t^2+1}dt \\ \text{Quand } x = 0 & , \quad t = 0 \\ \text{Quand } x = \ln(2) & , \quad t = 1 \end{cases}$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1}dx \\
&= \int_0^1 t\frac{2t}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{2t^2+2-2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 2-\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= [2t-2\arctan(t)]_0^1 \\
&= 2-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 4.

A l'aide du changement de variable $y=\frac{1}{x}$ *calculer* $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$

On pose

$$
\left\{
\begin{array}{cc}
y=\dfrac{1}{x} & \text{donc } x=\frac{1}{y} \\
dy=\frac{-1}{x^2}dx & \text{donc } dx=-x^2dy\text{, c'est à dire } dx=\frac{-1}{y^2}dy \\
\text{Quand } x=a & ,\quad y=\frac{1}{a} \\
\text{Quand } x=\frac{1}{a} & ,\quad y=a
\end{array}
\right.
$$

Cela donne

$$
\begin{aligned}
I=\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx &= \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{(1+\left(\frac{1}{y}\right)^2)^2}\times\frac{-1}{y^2}dy \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{(1+\frac{1}{y^2})^2y^2}dy \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{-\ln(y)}{y^3(1+\frac{1}{y^2})^2}dy \\
&= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{y\ln(y)}{y^4(1+\frac{1}{y^2})^2}dy \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{y\ln(y)}{(y^2+\frac{y^2}{y^2})^2}dy \\
&= -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{y\ln(y)}{(y^2+1)^2}dy = -\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx
\end{aligned}
$$

On reconnait à droite de l'égalité $-I$! Donc on a $I=-I$ ce qui veut dire $2I=0$ et donc $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx=0$.

Intégrales généralisées

Exercice 5.

Déterminer la nature des intégrales suivantes et lorsqu'elles convergent les calculer

$$I_1 = \int_0^1 \ln(x)dx \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)dx \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2\sqrt{x^5}}dx$$

$$I_7 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \qquad I_8 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2}dx \qquad I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$$

$$I_{10} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad I_{11} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}dx \qquad I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}dx$$

$$I_{13} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx \qquad I_{14} = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

1. I_1 est un grand classique ! Le ln est continu sur]0,1], donc localement intégrable sur cet intervalle. On a un problème de convergence en 0.

   On calcule une primitive de ln à l'aide d'une intégration par partie pour $1 \geq x > 0$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_x^1 \ln(t)dt &= [t\ln(t)]_x^1 - \int_x^1 t\frac{1}{t}dt \\ &= -x\ln(x) - \int_x^1 1dt \\ &= -x\ln(x) - (1-x) \end{aligned}$$

   Quand $x \to 0$ on a $x\ln(x) \to 0$ car la puissance l'emporte sur le ln. D'autre part $1 - x \to 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^1 \ln(t)dt$ existe et donc vaut $I_1 = -1$

2. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur [0,1[. On a donc cette fois un problème en 1. On calcule directement une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ pour $x < 1$, qui est la fonction $-2\sqrt{1-x}$. Ce qui donne donc

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt &= \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x \\ &= -2\sqrt{1-x} + 2 \end{aligned}$$

   Quand $x \to 1$ on a $-2\sqrt{1-x} \to 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 2$. Donc $I_2 = 2$.

3. Pour I_3 on remarque d'abord que la fonction $t \mapsto \frac{t}{(1-t)^2}$ est continue sur [0,1[. On a un problème au point 1 à examiner !

Posons $F(x) = \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dt$

On a en effet un problème de convergence pour x tend 1 pour cette intégrale. Effectuons le changement de variable

$$\left\{\begin{array}{rl} X = & 1-t \text{ donc } t = 1-X \\ dX = -dt & \\ \text{Quand} & t=0, \quad X=1 \\ \text{Quand} & t=x, \quad X=1-x \end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dt &= \int_1^{1-x} -\frac{1-X}{X^2}dX \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-X}{X^2}dX \end{aligned} \quad (2)$$

Quand $x \to 1$ on a $1-x \to 0$. Donc on cherche maintenant à examiner la convergence en 0 de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-X}{X^2}dX$.

Quand $X \to 0$ on a $\frac{1-X}{X^2} \sim \frac{1}{X^2}$ (pour le montrer il suffit d'étudier le quotient $\frac{\frac{1-X}{X^2}}{\frac{1}{X^2}}$ et montrer qu'il tend vers 1 quand $X \to 0$).

La fonction $X \mapsto \frac{1-X}{X^2}$ est toujours positive pour X dans $]0,1]$.

L'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ de paramètre $\alpha = 2 \geq 1$ est divergente.
Donc d'après le critère par équivalent pour les intégrales positives l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-X}{X^2}dX$ est divergente. Donc d'après (2) $\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dt \to +\infty$ quand $x \to 1$, I_3 diverge donc !

4. On examine maintenant I_4. On remarque que la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue, donc localement intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En effet on a
$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0^+$. Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ on a un problème de convergence en $\frac{\pi}{2}$.

   On peut écrire par exemple pour $x > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^x \tan(t)dt &= \int_0^x \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt \\ &= [-\ln(\cos(t))]_0^x \\ &= -\ln(\cos(x)) + \ln(\cos(0)) \\ &= -\ln(\cos(x)) + \ln(1) \\ &= -\ln(\cos(x)) \end{aligned}$$

   Or quand $x \to \frac{\pi}{2}^-$ on a $\cos(x) \to \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0^+$, donc comme $-\ln(X) \to +\infty$ quand $X \to 0$ et donc $\ln(\cos(x)) \to -\infty$ par composition des limites.

Donc $\displaystyle\int_0^x \tan(t)dt \to +\infty$ quand $x \to \frac{\pi}{2}$ et I_4 diverge.

5. Pour I_5 on a la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ qui est continue sur]0,1], donc localement intégrable sur]0,1]. On a un problème de convergence en 1.

   Or on remarque que $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$. Donc $\dfrac{e^x}{x} \sim \dfrac{1}{x}$ pour $x \to 0$ (si vous n'êtes pas convaincu(e), calculez la limite du quotient $\frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{1}{x}}$ pour $x \to 0$).

   La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ est toujours positive pour x dans]0,1]. Et de plus l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ étant une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \geq 1$ est divergente. Donc d'après le critère par équivalent, I_5 diverge.
6. Pour I_6 on indique que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^2\sqrt{x^5}}$ est continue sur]0,1], donc elle est localement intégrable sur cet intervalle. On a un problème de convergence en 0.

   On a l'équivalent pour $x \to 0$ $\dfrac{x}{(1+x)^2\sqrt{x^5}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{x^{5/2-1}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3/2}}dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 3/2 \geq 1$ diverge.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^2\sqrt{x^5}}$ est positive.

   Donc d'après le critère par équivalent, I_6 diverge.
7. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a donc le problème en $+\infty$ à étudier.

   On calcule pour $x > 0$

   $$\begin{aligned}\int_0^x e^{-t}dt &= \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -e^{-x} + 1\end{aligned}$$

   Donc quand $x \to +\infty$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x} + 1 = 1$ et donc I_7 converge et vaut 1.
8. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Le problème de convergence à étudier est donc en $+\infty$.

   Or pour x allant vers $+\infty$ on a $\dfrac{x}{(1+x)^2} \sim \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$, donc divergente. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x)^2}$ est positive. Donc d'après le critère par équivalent, I_8 diverge.
9. La fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On a donc un problème de convergence en $+\infty$.

Calculons pour $x > 1$ $\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}$. Remarquons que la fonction sous l'intégrale est de la forme $u'.u$ avec $u(t) = \arctan(t)$. Sa primitive est donc $\frac{(\arctan(t))^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt &= \left[\frac{(\arctan(t))^2}{2}\right]_0^x \\
&= \frac{(\arctan(x))^2}{2} - \frac{(\arctan(1))^2}{2} \\
&= \frac{(\arctan(x))^2}{2} - \frac{\pi^2}{32}
\end{aligned}$$

Pour $x \to +\infty$ on a $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$. I_9 est donc convergente.

10. La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc on a un problème de convergence pour I_{10} en $+\infty$.

    Remarquons que $\ln(x) \geq 1$ pour $x \geq e$. Ce qui donne $\frac{\ln(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$ pour $x \geq e$.

    Or la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est positive pour $x \geq 1$.

    Et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$, donc divergente. Donc d'après le critère par comparaison, l'intégrale I_{10} est divergente.

11. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Donc on doit examiner le problème de convergence en $+\infty$ et en 1.

    Commençons par le problème de convergence en $+\infty$. Pour x assez grand on a $\ln(x) \leq x$ vu que par exemple $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc pour x assez grand on a $\frac{\ln(x)}{x} \leq 1$, et donc $\frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{x}$ pour x assez grand et en particulier $x > 1$.

    Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$ est positive pour $x > 1$.

    De plus $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$ divergente. Donc d'après le critère par comparaison $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln(x)}dx$ diverge, donc I_{11} diverge.

12. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On a donc un problème de convergence en 0 et en $+\infty$.

    Commençons par le problème en $+\infty$.

    Pour x vers $+\infty$ on a $\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}}$, donc $\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \sim \frac{1}{x}$.

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ est positive pour $x \geq 0$. De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$ divergente. Donc d'après le critère par comparaison $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}dx$ diverge, donc I_{12} diverge.

13. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a ici un problème en $+\infty$ et en $-\infty$.

    Remarquons qu'on a déjà étudié le problème en $+\infty$ quand on a étudié I_7 et montré qu'elle convergeait.

    Étudions maintenant $\int_{-\infty}^0 e^{-x}dx$. Remarquons que pour $x < 0$

$$\begin{aligned}\int_x^0 e^{-t}dt &= \left[-e^{-x}\right]_x^0 \\ &= e^{-x} - 1\end{aligned}$$

    Or pour $x \to -\infty$ on a $-x \to +\infty$ et donc $e^{-x} \to +\infty$. Donc $\displaystyle\int_x^0 e^{-t}dt \to +\infty$ et I_{13} diverge.

14. On a $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a ici un problème en $+\infty$.

    Calculons en intégrant par parties

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}dt &= \left[-te^{-x}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} + \left[-e^{-t}\right]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1\end{aligned}$$

    Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = 1$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ car l'exponentielle l'emporte sur la puissance et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

    Donc $I_{14} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-t}dt = 1$.

Exercice 6.

Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ est bornée sur $[1, +\infty[$. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$.

On effectue une intégration par partie en intégrant f et en dérivant $\frac{1}{t}$

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt &= \left[F(t)\frac{1}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}F(t)dt \\ &= \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{1}{t^2}F(t)dt \\ &= \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt\end{aligned}$$

Comme F est bornée par hypothèse on sait qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout x dans $[1, +\infty[$ $|F(x)| \leq M$.

Donc $\left|\frac{F(x)}{x}\right| \leq \dfrac{M}{x}$ et donc par encadrement de limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$.

D'autre part montrons que $\displaystyle\int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt$ converge vers une limite finie.

En effet on a aussi vu que pour tout t dans $[1, +\infty[$ on a $|F(t)| \leq M$ donc $\left|\dfrac{F(t)}{t^2}\right| \leq M \times \dfrac{1}{t^2}$.

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$ donc convergente.

Donc d'après le critère par comparaison $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{F(t)}{t^2}\right| dt$ est convergente, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Donc finalement

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}dt\right) = \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$$

et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge.