Université d'Aix-Marseille | Site de l'Etoile, CMI
Master 1 de Mathématiques 2017-2018 | Analyse Fonctionnelle

Correction du Devoir no 1.

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de norme qui rende $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ complet.

1. *Soit V un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ (c'est à dire $V \neq \mathbb{E}$). Montrer que $\mathring{V} = \emptyset$.*

   Correction : On raisonne par l'absurde et on suppose que $\mathring{V} \neq \emptyset$. Donc il existe $x \in \mathring{V}$ et $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(x,r) \subset \mathring{V} \subset V$.

   Montrons que $\mathbb{B}(0,1) \subset V$. En effet soit $y \neq 0$ dans $\mathbb{B}(0,1)$. On a $z = \frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|} + x$ dans $\mathbb{B}(x,r)$ et donc dans V. Or x est dans V, donc $-x$ est dans V, donc comme z est dans V on a donc $\frac{r}{2}\frac{y}{\|y\|}$ dans V et donc y est dans V car V est un espace vectoriel. Donc on a bien $\mathbb{B}(0,1) \subset V$.

   Cela signifie que tout élément de $\mathbb{E}$ est dans V. En effet pour tout z élément de $\mathbb{E}$ on a $\frac{z}{2\|z\|}$ qui est dans $\mathbb{B}(0,1)$ donc dans V. Et donc z est dans V. Donc on a une contradiction avec l'hypothèse $V \neq \mathbb{E}$. D'où le résultat.

2. **Définition 1** *Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel. On dit que $\mathbb{E}$ admet une base algébrique si il existe un système de vecteurs $\{e_i, i \in I\}$ de $\mathbb{E}$ tel que tout $x \in \mathbb{E}$ s'écrive de manière unique*

   $$x = \sum_{i \in J} x_i e_i \text{ avec } J \subset I, J \text{ fini} .$$

   On suppose que $(\mathbb{E}, N)$ est un espace de Banach qui possède une base algébrique. *Montrer que soit $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel de dimension finie, soit I n'est pas dénombrable.*

   Correction : Soit $\{e_i, i \in I\}$ une base algébrique de $\mathbb{E}$.

   (a) 1er cas : I est fini et alors $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

   (b) 2ème cas : on suppose que I n'est pas fini. Montrons que I ne peut pas être dénombrable. On raisonne par l'absurde et on suppose que I est dénombrable. Quitte à reindexer les éléments de $\{e_i, i \in I\}$ on écrit $\{e_i, i \in I\} = \{e_j, j \in \mathbb{N}^*\}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note V_n l'espace engendré par les vecteurs $e_1, ..e_n$. On a $\mathbb{E} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^\star} V_m$.

En effet par définition d'une base algébrique, pour tout $x \in \mathbb{E}$ il existe $i_1, ..i_k$ tels que $x = \sum_{j=1}^{k} x_{i_j} e_{i_j}$, ou encore en notant $m = \sup_{j=1,..,k} i_j$ on a aussi clairement quitte à avoir $x_j = 0$ $x = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$ et donc $x \in V_m$. On a donc $\mathbb{E} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}^\star} V_m$, et comme $V_m \subset \mathbb{E}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$ on a l'égalité.

Or comme $\mathbb{E}$ n'est pas de dimension finie, $V_m \neq \mathbb{E}$ et donc $\mathring{V}_m = \emptyset$ d'après la première question. D'autre part l'espace V_m est un espace de dimension finie, donc il est fermé dans $\mathbb{E}$. Les $V_m, m \in \mathbb{N}^\star$ forment donc une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide de $\mathbb{E}$.

Comme $\mathbb{E}$ est complet d'après le corollaire du théorème de Baire on devrait avoir $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{m \in \mathbb{N}^\star} V_m}} = \mathring{\mathbb{E}} = \emptyset$, ce qui est impossible car $\mathbb{E}$ est à la fois fermé et ouvert pour lui-même. D'où la contradiction et I n'est pas dénombrable.

3. *Montrer qu'il n'existe pas de norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes qui rende cet espace complet.*

   Correction : D'après ce qui précéde si il existait une norme qui rende $\mathbb{R}[X]$ complet on aurait une contradiction car $\mathbb{R}[X]$ a clairement une base algébrique dénombrable qui est la base $\{1, X, X^2 .. X^n, ..\}$ classiquement appelée base canonique de l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

   Donc il n'existe aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet.

Exercice 2 *Certains résultats démontrés dans cet exercice sont utiles pour l'exercice 3.*

Définition 2 *Soit (X, d) un espace métrique.*

La distance à une partie A de X est la fonction $d_A : x \mapsto d(x, A)$ définie sur X telle que

$$d_A(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y), y \in A\}$$

Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

1. *Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points tels que $d(x, A) = 0$.*

   Correction : On considère $B = \{x : d(x, A) = 0\}$. Montrons que $B = \overline{A}$.

Soit $x \in B$. *Montrons que* $x \in \overline{A}$.

On a $d(x, A) = 0$. Donc par définition de $d_A(x) = d(x, A)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in A$ tel que $d(x, y) < \varepsilon$. Autrement dit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\varepsilon = \frac{1}{n}$ il existe $y_n \in A$ tel que $d(x, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Donc y_n converge vers x et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une suite de A qui converge vers x. Sa limite x est donc dans $\overline{A}$. Donc $B \subset \overline{A}$.

Soit $x \in \overline{A}$. *Montrons que* $x \in B$.

Comme $x \in \overline{A}$ il existe une suite de A notée z_n telle que z_n converge vers x. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq d(x, A) \leq d(x, z_n)$ par définition de $d_A(x) = d(x, A)$. Or $d(x, z_n)$ converge vers 0 car z_n converge vers x , et donc $d(x, A) = 0$. Donc x est dans B.

On a donc bien $B = \overline{A}$.

2. *Montrer que* $d_A : x \mapsto d(x, A)$ *est lipschitzienne de rapport* 1.

   Correction : Soient x et y dans X. Remarquons que ce qu'on doit montrer revient à montrer les inégalités suivantes

   (a) $d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y)$.

   (b) $d(y, A) \leq d(x, A) + d(x, y)$.

   En effet cela nous donne
   — $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$
   — $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x)$
   Et donc $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, ce qui est l'inégalité recherchée.

   Montrons les deux inégalités (2a) et (2b).

   Soit z dans A. On a $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Comme z est quelconque dans A on peut donc passer à la borne inférieure sur $z \in A$ dans le membre de droite de l'inégalité et on obtient

   $$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

   On voit qu'on peut refaire le même raisonnement avec y à la place de x et on obtient donc

   $$d(y, A) \leq d(x, A) + d(y, x).$$

   Ce qui nous donne le résultat.

3. *Soit K un compact de X et F un fermé disjoint de K. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x dans K et y dans F*
$$d(x,y) \geq \alpha.$$

   Correction : On considère la fonction définie sur K $x \mapsto d(x,F)$. D'après ce qui précède cette fonction est lipschitzienne, donc continue sur K, qui est compact. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$ elle est donc bornée et atteint ses bornes. Or K est disjoint de F qui est fermé donc $d(x,F) > 0$ pour tout $x \in K$ (sinon d'après la première question on aurait $x \in \overline{F} = F$). Donc $\inf_{x \in K} d(x,F) = \min_{x \in K} d(x,F) = d(x_0,F) > 0$ pour un certain $x_0 \in K$. On appelle $\alpha = d(x_0,F)$ et cela donne le résultat vu que l'on a pour tous $x \in K$ et $y \in F$
$$d(x,y) \geq d(x,F) \geq d(x_0,F) = \alpha$$

4. *Soit K un compact de X et U un ouvert qui contient K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$ on ait l'implication*
$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U$$

   Correction : *L'objectif est ici de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que si $x \notin U$ alors $d(x,K) \geq r$.*

   On considère $U^c = X/U$. C'est un fermé disjoint de K car $K \subset U$. Donc d'après ce qui précède il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $a \in K$ et $b \in U^c$ on a $d(a,b) \geq \alpha$.

   Fixons maintenant $b = x \in U^c$. On a donc pour tout $a \in K$ $d(x,a) \geq \alpha$. Donc en passant à la borne inférieure on a donc $d(x,K) \geq \alpha$. En prenant $r = \alpha$ on a donc la proposition.

Exercice 3 Soit $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ un espace normé et $\mathbb{M}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.. On considère la relation $\sim$ suivante définie sur $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$:
$$x \sim y \text{ si et seulement si } x - y \in \mathbb{M}$$
L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de l'espace quotient noté $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ pour la relation $\sim$.

1. *Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{E}$ (on pourra consulter l'annexe sur les relations d'équivalence en fin de devoir si nécessaire).*

   Correction : *Montrons que*
   (a) *$\sim$ est réflexive : $x \sim x$ pour tout $x \in \mathbb{S}$.*
   (b) *$\sim$ est symétrique : pour tous x et y dans $\mathbb{S}$ $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$*
   (c) *$\sim$ est transitive : pour tous x, y et z dans $\mathbb{S}$ si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$.*

En effet

(a) $x \sim x$ car $x - x = 0 \in \mathbb{M}$ (car $\mathbb{M}$ est un espace vectoriel), donc $\sim$ est réflexive.

(b) pour tous x et y dans $\mathbb{E}$ $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{M}$ et donc $y - x = -(x - y) \in \mathbb{M}$ (car $\mathbb{M}$ est un espace vectoriel), ce qui donne bien $y \sim x$, et donc $\sim$ est symétrique.

(c) pour tous x, y et z dans $\mathbb{S}$ si $x \sim y$ alors $x - y \in \mathbb{M}$, et $y \sim z$, donc $y - z \in \mathbb{M}$, donc $x - y + y - z = x - z \in \mathbb{M}$ (car $\mathbb{M}$ est un espace vectoriel), et donc $x \sim z$. Donc $\sim$ est transitive.

On note $\widetilde{x}$ la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{E}$ pour cette relation et $\mathbb{E}/\mathbb{M} = \{\widetilde{x}, x \in \mathbb{E}\}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\sim$.

2. *Vérifier que les opérations définies pour tous $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y} \ \textit{ et } \ \ \lambda\widetilde{x} := \widetilde{\lambda x}$$

sont bien définies et font de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ un espace vectoriel.

En particulier on commencera par montrer que ces opérations ne dépendent pas de l'élément x de $\mathbb{E}$ dans $\widetilde{x}$ ni de y de $\mathbb{E}$ dans $\widetilde{y}$ qu'on choisit pour faire le calcul.

Correction : Les deux opérations qu'on définit donne bien que si x et y sont des éléments de $\mathbb{E}$ alors $x + y$ est dans $\mathbb{E}$ et $\widetilde{x + y}$ est un élément de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$. D'autre part si x est un élément de $\mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ λx est bien un élément de $\mathbb{E}$ et $\widetilde{\lambda x}$ est un élément de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$.

Montrons que $+$ est correctement définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$, c'est à dire que $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y}$ ne dépend pas des représentants choisis dans $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ pour la calculer.

En effet soient $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ deux classes d'équivalence de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$, et soient deux éléments de $\mathbb{E}$ $x \in \widetilde{x}$ et $y \in \widetilde{y}$. On prend deux autres éléments $x' \in \widetilde{x}$ et $y' \in \widetilde{y}$, donc $x \sim x'$ et $y' \sim y$.

Montrons que $\widetilde{x + y} = \widetilde{x' + y'}$, ce qui montrera que le résultat de ce calcul ne dépend pas de x et de y choisis dans leur classe d'équivalence respective.
On a $x \sim x'$ donc $x - x' = m_1 \in \mathbb{M}$. D'autre part $y \sim y'$ donc $y - y' = m_2 \in \mathbb{M}$. On a donc $x + y - (x' + y') = m_1 + m_2 \in \mathbb{M}$. Donc $x + y \sim x' + y'$ et $\widetilde{x + y} = \widetilde{x' + y'}$. L'opération $+$ est donc bien définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ par $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{x + y}$.

Montrons que . est définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$, c'est à dire que $\widetilde{\lambda x}$ ne dépend pas du représentant choisi de $x \in \widetilde{x}$ pour la calculer.

Soit $\widetilde{x}$ une classe d'équivalence de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ et soit $x \in \widetilde{x}$. On prend $x' \in \widetilde{x}$, donc $x \sim x'$. Donc $x - x' = m \in \mathbb{M}$ et comme $\mathbb{M}$ est un sous-espace vectoriel $\lambda.(x - x') = \lambda.m \in \mathbb{M}$. Donc $\lambda.x \sim \lambda.x'$ et $\widetilde{\lambda.x} = \widetilde{\lambda.x'}$. Donc $\widetilde{\lambda x}$ ne dépend pas du représentant choisi pour la calculer et . est bien définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$.

On a donc bien $+$ et . qui sont respectivement des lois internes et externes sur $\mathbb{E}$. De plus

— $\mathbb{E}/\mathbb{M} \neq \emptyset$. En effet $0 = 0 \in \mathbb{M}$ et donc $\widetilde{0} \in \mathbb{E}/\mathbb{M}$.

— $+$ est commutative : *montrons que $\widetilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{y} + \widetilde{x}$, c'est à dire $\widetilde{x+y} = \widetilde{y+x}$.*

  On a $x + y - (y + x) = 0 \in \mathbb{M}$. Donc $\widetilde{x+y} = \widetilde{y+x}$, ce qui donne le résultat

— $+$ est associative : *montrons que $(\widetilde{x} + \widetilde{y}) + \widetilde{z} = \widetilde{x} + (\widetilde{y} + \widetilde{z})$, ce qui revient à montrer que $\widetilde{x+y} + \widetilde{z} = \widetilde{x} + \widetilde{y+z}$.*

  En effet avec l'associativité sur $\mathbb{E}$ on a $(x + y) + z = x + (y + z)$ donc $((x + y) + z) - (x + (y + z)) = 0 \in \mathbb{M}$ et $\widetilde{(x+y)+z} = \widetilde{x+(y+z)}$ donc $\widetilde{x+y} + \widetilde{z} = \widetilde{x} + \widetilde{y+z}$ et on a bien ce qu'on veut.

— $+$ admet un élément neutre. En effet on a $\widetilde{0} + \widetilde{x} = \widetilde{0+x} = \widetilde{x}$ vu que 0 est élément neutre dans $\mathbb{E}$.

— $-\widetilde{x}$ est bien l'opposé de $\widetilde{x}$ vu que $-\widetilde{x} + \widetilde{x} = \widetilde{-x} + \widetilde{x} = \widetilde{-x+x} = \widetilde{0}$.

— . est distributive par rapport à $+$. En effet pour tous λ dans $\mathbb{R}$ et tous $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ on a

$$\lambda\widetilde{x} + \lambda\widetilde{y} = \widetilde{\lambda.x} + \widetilde{\lambda.y} = \widetilde{\lambda.x + \lambda.y} = \widetilde{\lambda.(x+y)} = \lambda.\widetilde{x+y}.$$

— De même on a pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, et aussi $\widetilde{x}$ une classe d'équivalence

$$(\lambda + \mu).\widetilde{x} = \widetilde{(\lambda+\mu).x} = \widetilde{\lambda.x + \mu.x} = \widetilde{\lambda.x} + \widetilde{\mu.x} = \lambda.\widetilde{x} + \mu.\widetilde{x}$$

— On a aussi clairement $1.\widetilde{x} = \widetilde{1.x} = \widetilde{x}$.

— Enfin pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, et aussi $\widetilde{x}$ une classe d'équivalence

$$(\lambda\mu).\widetilde{x} = \widetilde{(\lambda\mu).x} = \widetilde{\lambda.(\mu.x)} = \lambda.\widetilde{\mu.x} = \lambda.(\mu.\widetilde{x})$$

On a donc bien que $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel.

3. Pour tout $x \in \mathbb{E}$, on pose

$$N(\widetilde{x}) := d(x, \mathbb{M}) := \inf\{d(x, y) : y \in \mathbb{M}\}$$

où d est la distance associée à la norme $\| \ \|$.

Montrer que N est bien définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$, c'est à dire que $N(\widetilde{x})$ ne dépend pas de $x \in \widetilde{x}$.

Correction : Soit $\widetilde{x}$ une classe d'équivalence élément de $\mathbb{E}/\mathbb{M}$, et x et x' deux éléments de $\widetilde{x}$. *Montrons que $d(x, M) = d(x', M)$.*

En effet $x \sim x'$ donc $x - x' = m' \in \mathbb{M}$. On a donc pour tout $m \in \mathbb{M}$

$$d(x', \mathbb{M}) \leq \|x' - m\|.$$

Donc pour tout $m \in \mathbb{M}$

$$d(x', \mathbb{M}) \leq \|x - m' - m\| \tag{1}$$

On pose $m'' = m + m'$. On a que m parcourt $\mathbb{M}$ et m'' aussi. En effet soit m'' quelconque dans $\mathbb{M}$, on peut toujours écrire $m'' = (m'' - m') + m'$ avec $m = m'' - m' \in \mathbb{M}$.

Donc $d(x', \mathbb{M}) \leq \|x - m''\|$ pour tout $m'' \in \mathbb{M}$ et on obtient $d(x', \mathbb{M}) \leq d(x, \mathbb{M})$ en passant à la borne inférieure. Le même raisonnement en partant de x plutôt que x' donne l'inégalité inverse.

Donc $d(x, \mathbb{M}) = d(x', \mathbb{M})$ et N est bien définie sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$.

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ si et seulement si $\mathbb{M}$ est fermé dans $\mathbb{E}$.

— *Montrons que $N(\widetilde{x}) = 0$ si et seulement si $\widetilde{x} = \widetilde{0}$.*

  Si $\widetilde{x} = \widetilde{0}$ alors on peut prendre $x = 0$ comme représentant de $\widetilde{x} = \widetilde{0}$. Calculons $d(0, \mathbb{M})$. On a évidemment $0 \in \mathbb{M}$ donc $d(0, \mathbb{M}) = 0 = N(\widetilde{0})$.
  Supposons maintenant que $N(\widetilde{x}) = 0$. Alors $d(x, \mathbb{M}) = 0$, ce qui signifie d'après l'exercice précédent que $x \in \overline{\mathbb{M}}$.

  On a donc deux cas :
  — $\mathbb{M}$ est fermé, donc $x \in \overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M}$. Donc $x = 0 + x \in \mathbb{M}$ et donc $x \sim 0$ et $\widetilde{x} = \widetilde{0}$.
  — $\mathbb{M}$ n'est pas fermé alors on a $\mathbb{M} \neq \overline{\mathbb{M}}$, et on peut donc avoir $x \in \overline{\mathbb{M}}$ et $x \notin \mathbb{M}$. Donc éventuellement on peut avoir $d(x, \mathbb{M}) = 0$ mais $\tilde{x} \neq \widetilde{0}$.

    Par exemple dans le cas où $\mathbb{E} = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de $\|.\|_\infty$, $\mathbb{M}$ l'espace des fonctions polynoômiales définies sur $[0, 1]$ on a toujours $d(f, \mathbb{M}) = 0 = N(\widetilde{f})$ pour tout $f \in \mathbb{E}$ car par le théorème de Weierstrass $\mathbb{M}$ est dense dans $\mathbb{E}$ pour $\|.\|_\infty$.

    D'autre part $\widetilde{0} = \mathbb{M}$ alors que $f : x \mapsto e^x$ n'est pas dans $\mathbb{M}$, donc $\widetilde{f} \neq \widetilde{0}$ alors que $N(\widetilde{f}) = 0$.

— *Montrons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\widetilde{x}$ dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$ on a $N(\lambda.\widetilde{x}) = |\lambda| N(\widetilde{x})$.*

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{x}$ dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$. On a pour tout $x \in \widetilde{x}$
$N(\lambda.\widetilde{x}) = N(\widetilde{\lambda x}) = d(\lambda x, \mathbb{M})$.

Or pour tout $m \in \mathbb{M}$ on a $d(\lambda x, \mathbb{M}) \leq \|\lambda x - m\|$.

On a donc deux cas
— Soit $\lambda = 0$ donc $N(\lambda.\widetilde{x}) = N(\widetilde{0}) = 0 = 0.N(\widetilde{x})$.
— Soit $\lambda \neq 0$ donc $d(\lambda x, \mathbb{M}) \leq \|\lambda x - m\|$ pour tout $m \in \mathbb{M}$.

Donc

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \mathbb{M}) &\leq \|\lambda x - m\| \\ \frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, \mathbb{M}) &\leq \|x - \tfrac{1}{\lambda} m\| \end{aligned}$$

On note $m' = \frac{1}{\lambda} m$. Avec m qui parcourt $\mathbb{M}$ on a m' qui parcourt $\mathbb{M}$. En effet pour $m' \in \mathbb{M}$ quelconque on peut écrire $m' = \frac{1}{\lambda} m$ avec $m = \lambda m' \in \mathbb{M}$.

Donc pour tout $m' \in \mathbb{M}$ on a $\frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, \mathbb{M}) \leq \|x - m'\|$ et en passant à la borne inférieure on a $\frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, \mathbb{M}) \leq d(x, \mathbb{M})$, donc $d(\lambda x, \mathbb{M}) \leq |\lambda| d(x, \mathbb{M})$. Ce qui donne donc $N(\lambda \widetilde{x}) \leq |\lambda| N(\widetilde{x})$.

Réciproquement $|\lambda| N(\widetilde{x}) \leq |\lambda| \|x - m\|$ pour tout $m \in \mathbb{M}$. Donc $|\lambda| N(\widetilde{x}) \leq \|\lambda x - \lambda m\|$.

On pose $m' = \lambda m$. Avec m qui parcourt $\mathbb{M}$ on a m' qui parcourt $\mathbb{M}$. En effet pour tout $m' \in \mathbb{M}$ on a $m' = \lambda m$ avec $m = \frac{1}{\lambda} m'$. Donc pour tout $m' \in \mathbb{M}$ on a $|\lambda| N(\widetilde{x}) \leq \|\lambda x - m'\|$ et en passant à la borne inférieure $|\lambda| N(\widetilde{x}) \leq d(\lambda x, \mathbb{M}) = N(\widetilde{\lambda x})$.

D'où l'égalité $|\lambda| N(\widetilde{x}) = N(\widetilde{\lambda x})$.

— *Montrons l'inégalité triangulaire.*

Soient $\widetilde{x}$ et $\widetilde{y}$ dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$. On a
$N(\widetilde{x} + \widetilde{y}) = N(\widetilde{x+y}) \leq d(x+y, \mathbb{M}) \leq \|x + y - m' - m''\|$ pour tous $m' \in \mathbb{M}$ et $m'' \in \mathbb{M}$.

On a donc pour tous $m' \in \mathbb{M}$ et $m'' \in \mathbb{M}$

$$N(\widetilde{x}+\widetilde{y}) = N(\widetilde{x+y}) \leq \|x-m'\| + \|y-m''\|$$

En passant à la borne inférieure sur $m' \in \mathbb{M}$ on a

$$N(\widetilde{x}+\widetilde{y}) = N(\widetilde{x+y}) \leq d(x,\mathbb{M}) + \|y-m''\|$$

et ensuite en passant à la borne inférieure sur $m'' \in \mathbb{M}$ on a

$$N(\widetilde{x}+\widetilde{y}) = N(\widetilde{x+y}) \leq d(x,\mathbb{M}) + d(y,\mathbb{M})$$

Cela donne bien

$$N(\widetilde{x}+\widetilde{y}) \leq N(\widetilde{x}) + N(\widetilde{y}).$$

Donc N est bien une norme sur $\mathbb{E}/\mathbb{M}$.

Désormais, on suppose que $\mathbb{M}$ est fermé dans $\mathbb{E}$.

4. *Établir que l'application $\pi : x \mapsto \widetilde{x}$ est bien linéaire et montrer que pour tout $x \in \mathbb{E}$*

$$N(\pi(x)) \leq \|x\| \tag{2}$$

Correction : Soient x et y dans $\mathbb{E}$. On a

$$\pi(x+y) = \widetilde{x+y} = \widetilde{x}+\widetilde{y} = \pi(x) + \pi(y)$$

par définition de l'addition dans $\mathbb{E}/\mathbb{M}$.

D'autre part $N(\pi(x)) = N(\widetilde{x}) \leq \|x-0\|$ car $0 \in \mathbb{M}$. D'où le résultat.

Montrer que $\pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right) = \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1)$.

Correction : Soit $\widetilde{z} \in \pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right)$. Donc il existe $x \in \mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)$ tel que $\widetilde{z} = \widetilde{x}$. Donc par (2) on a

$$N(\widetilde{z}) = N(\widetilde{x}) \leq \|x\| < 1$$

et donc $\widetilde{z} \in \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1)$. Ce qui donne $\pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right) \subset \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1)$.

Soit $\widetilde{z} \in \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1)$. Donc $N(\widetilde{z}) < 1$. On note z un élément de $\mathbb{E}$ tel que $z \in \widetilde{z}$.

Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé suffisamment petit il existe $m \in \mathbb{M}$ tel que $d(z,\mathbb{M}) \leq \|z-m\| < 1-\varepsilon$. En particulier $z-m$ est dans $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)$. Or $\widetilde{z-m} = \widetilde{z}$. Donc $\pi(z-m) = \widetilde{z}$ et $\widetilde{z} \in \pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right)$.

D'où $\mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(0,1) \subset \pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(0,1)\right)$, ce qui donne l'égalité entre les deux ensembles.

En déduire que π est ouverte de $(\mathbb{E}, \|\ \|)$ sur $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.

Remarquons d'abord que par la même démonstration que précédemment on a $\mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(\widetilde{x}, r) = \pi\left(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(x,r)\right)$.

Faites-la en exercice !

Soit U un ouvert de $\mathbb{E}$. *Montrons que $\pi(U)$ est un ouvert de $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.*

Soit $\widetilde{x} \in \pi(U)$ et $x \in U$ tel que $\widetilde{x} = \pi(x)$. Vu que U est un ouvert il existe $\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(x,r) \subset U$. Donc $\pi(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(x,r)) \subset \pi(U)$.

Or comme d'après ce qui précède $\pi(\mathbb{B}_{\mathbb{E}}(x,r)) = \mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(\widetilde{x}, r)$ on a donc $\mathbb{B}_{\mathbb{E}/\mathbb{M}}(\widetilde{x}, r) \subset \pi(U)$. Donc $\pi(U)$ est bien un ouvert de $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$. L'application π est donc ouverte.

5. *Montrer que toute suite de Cauchy $(\widetilde{x_n})_n$ dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ admet une sous-suite $(\widetilde{x_{\varphi(n)}})_n$ vérifiant*

$$N\left(\widetilde{x_{\varphi(n+1)}} - \widetilde{x_{\varphi(n)}}\right) < \frac{1}{2^n}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Correction : Soit $(\widetilde{x_n})_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.

Pour $\varepsilon = 1 = \frac{1}{2^0}$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N_0$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N(\widetilde{x_m} - \widetilde{x_{m+k}}) < 1 \tag{3}$$

On prend $\phi(0) = N_0$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^1}$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N_1$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N(\widetilde{x_m} - \widetilde{x_{m+k}}) < \frac{1}{2^1} \tag{4}$$

On prend $\phi(1) = \max(N_1, \phi(0)) + 1$. On a donc bien d'après (12)

$$N(\widetilde{x_{\phi(1)}} - \widetilde{x_{\phi(0)}}) < 1 \tag{5}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N_2$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N(\widetilde{x_m} - \widetilde{x_{m+k}}) < \frac{1}{2^2} \tag{6}$$

On prend $\phi(2) = \max(\phi(1), \mathbb{N}_2) + 1$. Remarquons que par construction $\phi(2) > \phi(1) > N_1$. On a donc bien d'après (6)

$$N(\widetilde{x_{\phi(2)}} - \widetilde{x_{\phi(1)}}) < \frac{1}{2^1} \tag{7}$$

On suppose pour tout $l \leq n+1$ on a construit $\phi(l)$, qui vérifie pour tous $l \leq n$ $\phi(l) < \phi(l+1)$ et

$$N(\widetilde{x_{\phi(l+1)}} - \widetilde{x_{\phi(l)}}) < \frac{1}{2^l} \tag{8}$$

et tel que pour tous $l \leq n$ $\phi(l+1) > N_l$ avec N_l tel que pour tout $m \geq N_l$ et tout $k \in \mathbb{N}$

$$N(\widetilde{x_m} - \widetilde{x_{m+k}}) < \frac{1}{2^{l+1}} \tag{9}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+2}}$ il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N'$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$N(\widetilde{x_m} - \widetilde{x_{m+k}}) < \frac{1}{2^{n+2}} \tag{10}$$

On pose alors $\phi(n+2) = \max(\phi(n+1), N') + 1$. On a donc d'après (9), vu que par construction $\phi(n+2) > \phi(n+1) > N_{n+1}$

$$N(\widetilde{x_{\phi(n+2)}} - \widetilde{x_{\phi(n+1)}}) < \frac{1}{2^{n+1}} \tag{11}$$

On a donc bien montré que les propriétés voulues sont valides au rang $n+1$. Donc par le principe de récurrence ces propriétés sont valides pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. *Montrer que si $(\widetilde{x_n})_n$ et $(\widetilde{x_{\varphi(n)}})_n$ sont comme dans la question précédente, alors pour tout entier naturel n il existe $y_n \in \widetilde{x_{\phi(n)}}$ tel que la suite $(y_n)_n$ vérifie*

$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

Correction : On va construire par récurrence la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On prend d'abord $x_{\phi(0)} \in \widetilde{x_{\phi(0)}}$ quelconque et on pose $y_0 = x_{\phi(0)}$.

Soit $n = 1$.

D'après ce qui précède vu que

$$N(\widetilde{x_{\phi(1)}} - \widetilde{x_{\phi(0)}}) < \frac{1}{2^0} \tag{12}$$

avec $x_{\phi(1)} \in \widetilde{x_{\phi(1)}}$ et $y_0 = x_{\phi(0)} \in \widetilde{x_{\phi(0)}}$, il existe $m \in \mathbb{M}$ tel que

$$\|x_{\phi(1)} - y_0 - m\| < \frac{1}{2^0}$$

On pose alors $y_1 = x_{\phi(1)} - m$. On a bien le résultat voulu car $\widetilde{y_1} = \widetilde{x_{\phi(1)} - m} = \widetilde{x_{\phi(1)}}$.

On suppose qu'on a construit $y_0, .., y_n$ tels que pour $l \leq n-1$ $y_l \in \widetilde{x_{\phi(l)}}$ et que

$$\|y_{l+1} - y_l\| < \frac{1}{2^l}.$$

Montrons qu'on peut construire $y_{n+1} \in \widetilde{x_{\phi(n+1)}}$ tel que

$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

D'après ce qui précède vu que

$$N(\widetilde{x_{\phi(n+1)}} - \widetilde{x_{\phi(n)}}) < \frac{1}{2^n}. \tag{13}$$

on peut prendre $y_n \in \widetilde{x_{\phi(n)}}$ et $x_{\phi(n+1)} \in \widetilde{x_{\phi(n+1)}}$, il existe $m_n \in \mathbb{M}$ tel que

$$\|x_{\phi(n+1)} - y_n - m_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

On pose alors $y_{n+1} = x_{\phi(n+1)} - m_n$. On a bien le résultat voulu car $\widetilde{y_{n+1}} = \widetilde{x_{\phi(n+1)} - m_n} = \widetilde{x_{\phi(n+1)}}$.

On a montré que la construction était possible au rang $n+1$. Elle est vraie aussi au rang $n = 1$.

Donc par le principe de récurrence cette construction est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. *Établir que si $(\mathbb{E}, \| \|)$ est un espace de Banach alors $(\mathbb{M}, \| \|)$ et $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ sont des espaces de Banach.*

   Correction : Supposons que $(\mathbb{E}, \| \|)$ est un espace de Banach. Comme $\mathbb{M}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbb{E}$ qui est un espace de Banach, $\mathbb{M}$ est un espace de Banach.

   Pour ce qui concerne $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$, considérons une suite de Cauchy $\widetilde{x_n}$ de $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.

   D'après les questions précédentes il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{E}$ et une sous-suite $(\widetilde{x_{\phi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $y_n \in \widetilde{x_{\phi(n)}}$ et telle que

$$\|y_{n+1} - y_n\| < \frac{1}{2^n}. \tag{14}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\|y_N - y_{N+k}\| = \|y_N - y_{N+1} + y_{N+1} - y_{N+2} + y_{N+2} .. - y_{N+k}\| \leq \sum_{n=N}^{N+k-1} \|y_n - y_{n+1}\|.$$

Donc d'après (14)

$$\begin{aligned}
\|y_N - y_{N+k}\| &\leq \sum_{n=N}^{N+k-1} \|y_n - y_{n+1}\| \\
&\leq \sum_{n=N}^{N+k-1} \frac{1}{2^n} \\
&\leq \frac{1}{2^N} \frac{1 - 2^{N+k-1-N+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2^N} \frac{1 - 2^k}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{N-1}}(1 - 2^k) \leq \frac{1}{2^{N-1}}
\end{aligned}$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ (vérifiant $\frac{1}{2^{N_0-1}} < \varepsilon$) tel que pour $N \geq N_0$ et $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\|y_N - y_{N+k}\| < \varepsilon$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{E}, \|.\|)$. Comme $\mathbb{E}$ est complet pour $\|.\|$ elle a une limite qu'on note y.

D'après (2) on a donc

$$N(\widetilde{y} - \widetilde{x_{\phi(n)}}) \leq \|y - y_n\|$$

Donc $\widetilde{x_{\phi(n)}}$ converge vers $\widetilde{y}$ dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$. Or toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente. Donc $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ est un espace de Banach.

Réciproquement, supposons que $(\mathbb{M}, \| \|)$ et $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$ sont des espaces de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{E}, \| \|)$.

8. *Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{E}$ tel que la suite $(\widetilde{x_n})_n$ converge vers $\widetilde{x}$ dans $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$.*

Correction : Vu que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{E}, \|.\|)$ et d'après (2) on a pour $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ et $k \in \mathbb{N}$

$$N(\widetilde{x_n} - \widetilde{x_{n+k}}) \leq \|x_n - x_{n+k}\| < \varepsilon$$

Donc $(\widetilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{E}/\mathbb{M}, N)$, donc elle converge vers un élément $\widetilde{x}$ et on considère $x \in \widetilde{x}$. Cela nous donne le résultat.

9. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in \mathbb{M}$ tel que*

$$\|x_n - x - y_n\| < \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right). \tag{15}$$

Correction : Soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$, par définition de la borne inférieure il existe $y_n \in \mathbb{M}$ tel que

$$N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) \leq \|x_n - x - y_n\| < \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right).$$

10. *Montrer que la suite $(y_n)_n$ est de de Cauchy dans $\mathbb{M}$.*

Correction : on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_{n+k}\| &= \|y_n + x - x_n + x_n - x_{n+k} + x_{n+k} - x - y_{n+k}\| \\
&\leq \|y_n + x - x_n\| + \|x_n - x_{n+k}\| + \|x_{n+k} - x - y_{n+k}\| \\
&\leq \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) + \|x_n - x_{n+k}\| + \frac{1}{n+k} + N\left(\widetilde{x_{n+k}} - \widetilde{x}\right)
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$

— il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$ et $k \in \mathbb{N}$ $\|x_n - x_{n+k}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{E}, \|.\|)$.

— il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_2$ et $\frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc pour $n + k \geq N_2$ on a aussi $\frac{1}{n+k} + N\left(\widetilde{x_{n+k}} - \widetilde{x}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Cela nous donne donc que pour $n \geq \max(N_1, N_2)$ on a $\|y_n - y_{n+k}\| < \varepsilon$.

11. *Établir que $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ est un espace de Banach.*

Correction : Comme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{M}$ qui est un espace de Banach elle converge vers un élément y de $\mathbb{M}$. D'après (15) on a

$$\begin{aligned}
\|x_n - x - y_n\| &\leq \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) \\
\|x_n - x - y + y - y_n\| &\leq \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) \\
\|x_n - x - y\| - \|y - y_n\| &\leq \|x_n - x - y + y - y_n\| \leq \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right) \\
\|x_n - x - y\| &\leq \|y - y_n\| + \frac{1}{n} + N\left(\widetilde{x_n} - \widetilde{x}\right)
\end{aligned}$$

Or on voit que chaque terme du membre de droite de l'inégalité tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc x_n converge vers $x + y$. Et donc $(x_n)_n$ converge et $(\mathbb{E}, \| \ \|)$ est un espace de Banach.