Correction des exercices 1 et 2 du devoir à la maison

Exercice 1. **adapté d'un oral de l'X 2016, mineure mathématique**

Soit $f = [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^+,\mathcal{B}(\mathbb{R}^+),\lambda) = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

1. A-t-on $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

Correction:

Non ! en effet le contre-exemple suivant montre que ce n'est pas nécessairement le cas.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $f_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{[2^n,2^n+2^{-n}]}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} f_N(x)$.
Montrons f est correctement définie .

- *Soit $0 \leq x < 1$ et $f_N(x) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, donc $f(x) = \lim\limits_{N\to+\infty} 0 = 0$.*
- *Soit $x \geq 1$. Il existe un unique $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n_0} \leq x < 2^{n_0+1}$. On distingue alors deux cas*
  - *Soit $x \leq 2^{n_0} + 2^{-n_0}$. Alors pour tout $N \geq n_0$ $f_N(x) = 1$ et donc $f(x) = 1$.*
  - *Soit $2^{n_0} + 2^{-n_0} < x \leq 2^{n_0+1}$. Alors pour tout $N \geq n_0$ $f_N(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$.*

Dans tous les cas on voit que $f(x)$ est bien définie.

La fonction f_N est une fonction étagée positive, comme combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de boréliens qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, elle est donc mesurable positive. Donc f qui est une limite simple de fonctions mesurables positives, est donc mesurable positive.

D'autre part on a f_N qui est une suite croissante de fonctions mesurables positives car toutes les fonctions f_N sont mesurables positives et vérifient $f_N(x) \leq f_{N+1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En effet si $x \leq 2^N + 2^{-N}$ on a $f_N(x) = f_{N+1}(x)$ et si $x > 2^N + 2^{-N}$ on a $f_N(x) = 0$ alors que $f_{N+1}(x) \geq 0$. Donc f_N est bien une suite croissante de fonctions mesurables positives. Elle converge simplement vers f.
Le théorème de convergence monotone nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{N\to+\infty} \int f_N d\lambda = \int f d\lambda$. Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\int f_N d\lambda = \sum_{n=0}^{N} \lambda([2^n,2^n+2^{-n}]) = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} = \frac{1-2^{-N-1}}{1-2^{-1}}$$

Donc

$$\lim_{N\to+\infty} \int f_N d\lambda = \int f d\lambda = \frac{1}{1-2^{-1}} = 2$$

Donc f est bien dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Par contre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *n'est pas* 0 *(*$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *n'existe d'ailleurs pas).*

En effet soit $A \geq 0$*. Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $2^N > A$*.*
Posons $x_N = 2^N + 2^{-N-1}$*. On a* $x_N > 2^N > A$*. De plus* x_N *est dans l'intervalle* $[2^N, 2^N + 2^{-N}]$*. Donc* $f(x_N) = f_N(x_N) = 1$*.*

Donc il existe $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *tel que pour tout* $A \in \mathbb{R}^+$ *il existe* $x_N \geq A$ *tel que* $f(x_N) > \varepsilon$*. Donc* f *ne tend pas vers* 0 *à l'infini.*

2. Montrer que si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction:

Soit f *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^+$ *telle que* $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$*. On a par le théorème fondamental de l'analyse* $f(x) = \int_0^x f'(t)dt + C$ *où* C *est une constante.*

Par coincidence entre l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue sur l'ensemble des fonctions continues sur un support borné on a donc

$$f(x) = \int \mathbb{1}_{[0,x]} f' d\lambda + C$$

Montrons dans un premier temps que f *a une limite en* $+\infty$*, puis nous montrerons que cette limite est nécessairement* 0*.*

Remarquons que f' *est continue sur* $\mathbb{R}^+$ *donc elle est définie partout, elle est évidemment mesurable, et même dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$ *par hypothèse.*
Soit $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs quelconque qui tend vers* $+\infty$*. On pose* $g_N = \mathbb{1}_{[0,x_N]} f'$ *pour* $N \in \mathbb{N}$*. La fonction* g_N *est le produit de deux fonctions mesurables donc elle est mesurable.*

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ $g_N(x) \to f'(x)$ *quand* $\to +\infty$*.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *on a* $|g_N(x)| \leq |f'(x)|$*. Or* $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$*.*

Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\lim_{N\to+\infty} \int g_N d\lambda = \int f' d\lambda$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ $\int g_N d\lambda = f(x_N) - C$*. Donc* $\lim_{N\to+\infty} f(x_N) - C = \int f' d\lambda$*. Cette limite ne dépend pas de la suite* $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *choisie qui tend vers* $+\infty$*. Donc* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - C = \int f' d\lambda$*.*

Donc f *converge vers une limite* $\ell = C + \int f' d\lambda$ *en* $+\infty$*.*

Montrons maintenant que cette limite ℓ *est nécessairement nulle.*

Rappelons que la fonction f *est à valeurs positives donc* $\ell \geq 0$*.*
Supposons en raisonnant par l'absurde que $\ell > 0$*. Alors il existerait* $A > 0$ *tel que pour tout* $x > A$ *on a* $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$*.*
Cela nous donnerait donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x)\mathbb{1}_{]A,+\infty[}(x) \geq \frac{\ell}{2}\mathbb{1}_{]A,+\infty[}(x)$$

La fonction $x \mapsto \frac{\ell}{2}\mathbb{1}_{]A,+\infty[}(x)$ *est mesurable positive. Son intégrale est infinie car* $]A,+\infty[$ *n'est pas de mesure finie.*
Donc f *n'aurait pas une intégrale finie car vu que* f *est positive*

$$\int f d\lambda \geq \int f \mathbb{1}_{]A,+\infty[} d\lambda$$

On a donc une contradiction et $\ell = 0$.

Donc f *a une limite nulle en* $+\infty$.

3. Montrer que si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Correction:

On raisonne par l'absurde. Supposons que f *ne tende pas vers* 0 *à l'infini.*
Donc il existe $\tilde{\varepsilon} > 0$ *tel que pour tout* $A > 0$ *il existe* $x_A > A$ *tel que* $f(x_A) > \tilde{\varepsilon}$.

Construisons d'abord une suite x_N *strictement croissante et tendant vers* $+\infty$ *telle que* $f(x_N) > \tilde{\varepsilon}$.

Soit $A = 1$ *alors il existe* $x_1 > A$ *tel que* $f(x_1) > \tilde{\varepsilon}$.

On prend maintenant $A = \max(x_1, 2)$ *alors il existe* $x_2 > A$ *tel que* $f(x_2) > \tilde{\varepsilon}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ *avec* $N \geq 3$. *Supposons qu'on a construit* $x_3, x_4, \ldots, x_N$ *avec* $x_N > \max(N, x_{N-1})$ *tel que* $f(x_N) > \tilde{\varepsilon}$. *Montrons qu'on peut construire* $x_{N+1} > \max(x_N, N+1)$ *tel que* $f(x_{N+1}) > \tilde{\varepsilon}$.

En effet pour $A = \max(x_N, N+1)$ *il existe* $x_{N+1} > A$ *tel que* $f(x_{N+1}) > \tilde{\varepsilon}$.
Grâce au principe de récurrence il est donc possible de construire pour tout $N \geq 2$ *un réel positif* x_N *qui vérifie* $x_N > N$ *et* $x_N > x_{N-1}$.

On a bien la suite voulue.

Comme f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$ *pour* $\tilde{\varepsilon} > 0$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que si* x *et* y *sont tels que* $|x - y| < \eta$ *alors* $|f(x) - f(y)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

Donc pour tout $N \geq 1$ *et pour tout* y *tel que* $|x_N - y| < \eta$ *on a*

$$\begin{aligned}
& |f(x_N) - f(y)| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \\
-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} &< -f(x_N) + f(y) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \\
f(x_N) - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} &< f(y) \\
\tilde{\varepsilon} - \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} &< f(y) \\
\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} &< f(y)
\end{aligned}$$

Donc on a pour tout $N \geq 1$ *et pour tout* $y \in]x_N - \eta, x_N + \eta[$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} < f(y)$$

Donc en posant $I(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{]x_k-\eta,x_k+\eta[}$ *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{2} I(x) \leq (fI)(x) \leq f(x) \tag{1}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $I(x)$ *est la limite de* $I_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{]x_k-\eta,x_k+\eta[}(x)$ *quand* $N \to +\infty$*. Les fonctions* I_N *sont des fonctions étagées positives, donc* I *est mesurable positive. De plus comme la suite* I_N *est croissante (car pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *on a* $I_N(x) \leq I_{N+1}(x)$*) on a donc d'après le théorème de convergence monotone*

$$\lim_{N\to+\infty} \int I_N d\lambda = \int I d\lambda$$

Or pour $N \geq 1$ $\int I_N d\lambda = \sum_{k=1}^{N} \lambda(]x_k - \eta, x_k + \eta[) = 2\eta N$*. Donc* $\int I d\lambda = +\infty$ *et donc*

$$\int \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} I d\lambda = +\infty \tag{2}$$

Donc d'après (1) on a une contradiction car nos hypothèses disent que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$*.*

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *si* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$*.*

4. On suppose que f est décroissante.
   (a) Montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Correction:

Par définition d'une fonction décroissante on a donc f *définie partout.*
Soit $x > 0$ *on considère* $\int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda$*. On a pour tout* $u \in \mathbb{R}^+$ *vu que* f *est décroissante*

$$\mathbb{1}_{[x/2,x]}(u) f(u) \geq f(x) \mathbb{1}_{[x/2,x]}(u)$$

Les fonctions $u \mapsto \mathbb{1}_{[x/2,x]}(u) f(u)$ *et* $u \mapsto f(x)\mathbb{1}_{[x/2,x]}(u)$ *sont des produits de fonctions mesurables positives donc elles sont mesurables positives.*
Donc par croissance et linéarité de l'intégrale on a

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda &\geq f(x) \int \mathbb{1}_{[x/2,x]} d\lambda \\ \int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda &\geq f(x) \frac{x}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

Montrons que $\lim_{x\to+\infty} \int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda = 0$*.*
On a pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ *et pour* $x \to +\infty$ $\mathbb{1}_{[x/2,x]}(u) f(u) \to 0$*.*

En effet à u *fixé, pour tout* x *tel que* $\frac{x}{2} > u$ *on a* $\mathbb{1}_{[x/2,x]}(u) f(u) = 0$*. Donc* $\lim_{x\to+\infty} \mathbb{1}_{[x/2,x]}(u) f(u) = 0$

D'autre part on a pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ $\mathbb{1}_{[x/2,x]}(u)f(u) \leq f(u)$. La fonction f étant dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^+)$ on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda = 0$$

Donc d'après (3) et le fait que la fonction f est positive on a $0 \leq f(x)x \leq 2\int \mathbb{1}_{[x/2,x]} f d\lambda$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

(b) Peut-on trouver $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$?

Correction:

La réponse est non !
On considère $f : x \mapsto \dfrac{\mathbb{1}_{[2,+\infty[}(x)}{x\ln^2(x)}$. La fonction f est mesurable positive car elle est le produit de fonctions mesurables positive. Elle est clairement décroissante comme produit de fonctions positives et décroissantes.

De plus étant positive et continue son intégrale généralisée de Riemann et son intégrale de Lebesgue coincident. Or on a que

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \int_2^X f(x)dx = \lim_{X\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^X = \frac{1}{\ln(2)}$$

donc f est bien dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Or si $\alpha > 1$ $x^\alpha f(x) \to +\infty$ pour $x \to +\infty$.

Exercice 2. **Casting 2016-Majeure Mathématiques**

On considère

$$\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$$

1. Donner le domaine de définition de φ.

Correction:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $t \mapsto \dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ qui est mesurable comme produit de fonctions mesurables. D'autre part sur $\mathbb{R}^+$ $t \mapsto \left|\dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\right| = \dfrac{1}{1+t^2}$ est une fonction continue et positive.
L'intégrale de Lebesgue de $g : t \mapsto \left|\dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\right| \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) = \dfrac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ coincide donc avec son intégrale généralisée de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$. Or

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{X\to+\infty} \left[\arctan(t)\right]_0^X = \frac{\pi}{2}$$

Donc l'intégrale de g converge, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto \dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est

une fonction intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc φ est définie partout.

2. Donner le domaine de continuité de φ.

Correction:

On peut appliquer ici le théorème de continuité sous le signe intégrale.
En effet pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
D'autre part pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\left|\dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
Or comme on l'a vu la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc d'après le théorème de continuité sous le signe somme la fonction φ est continue en tout point x de $\mathbb{R}$ donc sur tout $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\, \varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2}dt$$

Indication : on pourra calculer la dérivée de $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$.

Correction:

Le problème dans cette question est que la fonction $t \mapsto \dfrac{te^{itx}}{1+t^2}$ n'est pas Lebesgue-intégrable car son module a une intégrale infinie.

Nous allons d'abord commencer par montrer que l'intégrale $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ite^{itx}}{1+t^2}dt$ est correctement définie en tant qu'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre x, puis construire une suite de fonctions φ_n dérivable et qui converge simplement vers φ, telle que la suite des dérivées φ'_n converge uniformément vers $G(x)$ sur tout intervalle $[a,b]$ qui ne contient pas 0. Cela nous permettra d'obtenir le résultat que nous cherchons.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ la fonction $t \mapsto \dfrac{ite^{itx}}{1+t^2}$ étant continue est donc localement intégrable et donc intégrable sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On a également coincidence entre son intégrale de Riemann sur tout intervalle $[a,b]$ et l'intégrale de Lebesgue de $t \mapsto \dfrac{ite^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$.

Or on a pour tout $X \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$, en intégrant par partie

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{ite^{itx}}{1+t^2} &= \left[\frac{e^{itx}}{ix}\frac{it}{1+t^2}\right]_1^X - \int_1^X \frac{e^{itx}}{x}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt \\
&= \frac{Xe^{ixX}}{x(1+X^2)} - \frac{e^{ix}}{2x} - \frac{1}{x}\int_1^X e^{itx}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt \qquad (4)
\end{aligned}$$

Or quand $X \to +\infty$ *on a* $\lim\limits_{X\to+\infty} \left|\dfrac{Xe^{ixX}}{x(1+X^2)}\right| = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{x(1+X^2)} = 0$.

De plus montrons que $\displaystyle\int_1^X \frac{e^{itx}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$ *est absolument convergente quand* $X \to +\infty$.

En effet au voisinage de $+\infty$ $\left|\dfrac{e^{itx}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right| \sim_{(+\infty)} \dfrac{1}{t^2}$. *Or l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *est une intégrale de Riemann du type* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *avec* $\alpha = 2 > 1$, *donc convergente.*

Donc par le critère par équivalent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{itx}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right| dt$ *est convergente quand* $X \to +\infty$, *donc* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt$ *est absolument convergente, donc convergente.* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{ite^{itx}}{1+t^2}dt$ *converge d'après (4) et ce qu'on a déjà dit.*

Or sur l'intervalle [0,1] *la fonction* $t \mapsto \dfrac{ite^{itx}}{1+t^2}$ *est continue et donc elle est évidemment intégrable. Donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ite^{itx}}{1+t^2}dt$ *converge et donc* G *est bien définie pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$. *De plus on a d'après (4) l'expression suivante pour* G *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$

$$G(x) = \int_0^1 \frac{ite^{itx}}{1+t^2}dt - \frac{e^{ix}}{2x} - \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{itx}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt \tag{5}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Posons* $\varphi_n : x \mapsto \int_0^n \dfrac{e^{itx}}{1+t^2}dt$. *Étudions les propriétés de la suite de fonctions* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ *fixé. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ $\dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ *converge vers* $\dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty]}(t)$. *De plus on a clairement pour tout* $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\right| \leq \left|\frac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)\right|$$

Or on a vu que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ *est intégrable, et donc pour* $x \in \mathbb{R}$, *par le théorème de convergence dominée*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2}dt = \varphi(x)$$

Donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* φ *sur tout* $\mathbb{R}$.

D'autre part pour tout $t \in \mathbb{R}$ *la fonction* $x \mapsto \dfrac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ *est dérivable et sa dérivée vaut* $\dfrac{te^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$
On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$$

Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ *est intégrable. Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale* φ_n *est dérivable en tout point* x *de* $\mathbb{R}$ *et donc sur tout* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\varphi_n'(x) = \int \frac{te^{itx}}{1+t^2}\mathbb{1}_{[0,n]}(t)dt = \int_0^n \frac{te^{itx}}{1+t^2}dt$$

Remarquons qu'en pratiquant la même intégration par partie que dans (4) on a

$$\varphi_n'(x) = \int_0^1 \frac{te^{itx}}{1+t^2}dt + \frac{ne^{ixn}}{x(1+n^2)} - \frac{e^{ix}}{2x} - \frac{1}{x}\int_1^n e^{itx}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt \tag{6}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ *fixé. On considère* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ *de même signe tels que* $x \in]a,b[$.

Montrons que φ_n' *converge uniformément vers* $G(x)$ *sur* $[a,b]$.
Par définition de l'intégrale généralisée G *on a clairement* φ_n' *qui converge simplement en tout point de* $\mathbb{R}^*$ *vers* G.

Montrons que φ_n' *est uniformément de Cauchy sur* $[a,b]$*, ce qui nous montrera qu'elle est uniformément convergente sur* $[a,b]$ *vers une fonction* g*. Du fait qu'elle converge aussi simplement vers* G*, par unicité de la limite on aura qu'elle converge uniformément vers* $G = g$ *sur* $[a,b]$.

Soient n,k *dans* $\mathbb{N}^*$ *tels que* $n = N + k$ *pour* $N \in \mathbb{N}$*. Posons également* $m = \min(|a|,|b|)$ *et* $M = \max(|a|,|b|)$.

Calculons pour $x \in [a,b]$ *(en utilisant (6))*

$$\begin{aligned}
|\varphi_{N+k}'(x) - \varphi_k'(x)| &= \left|\frac{ne^{ixn}}{x(1+n^2)} - \frac{ke^{ixk}}{x(1+k^2)} - \frac{1}{x}\int_k^n e^{itx}\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}dt\right| && (7)\\
&\leq \left|\frac{ne^{ixn}}{x(1+n^2)}\right| + \left|\frac{ke^{ixk}}{x(1+k^2)}\right| + \frac{1}{x}\int_k^n \left|e^{itx}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\right| dt && (8)\\
&\leq \frac{1}{mn} + \frac{1}{mk} + \frac{1}{m}\int_k^n \frac{1}{t^2}dt && (9)\\
&\leq \frac{2}{mk} + \int_k^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt && (10)\\
&\leq \frac{2}{mk} + \frac{1}{k} && (11)
\end{aligned}$$

Or la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $u_k = \frac{2}{mk} + \frac{1}{k}$ *converge vers* 0 *quand* $k \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$*. Il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $k \geq k_0$ *on a*

$$\frac{2}{mk} + \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ *il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que pour tout* $k \geq k_0$*, pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [a,b]$

$$|\varphi_{N+k}'(x) - \varphi_k'(x)| < \varepsilon$$

Donc la suite $(\varphi'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur $[a,b]$. Donc elle converge uniformément vers une fonction g sur $[a,b]$.

Remarquons enfin que par les mêmes arguments que l'on a déjà utilisés pour φ_n φ'_n est continue sur $[a,b]$. Donc g sa limite est continue car la convergence de φ'_n vers g est uniforme sur $[a,b]$.
De plus φ'_n converge simplement vers g sur $[a,b]$ vu qu'elle converge uniformément. Or on sait qu'elle converge aussi simplement vers G sur $\mathbb{R}^*$. Donc $g(x) = G(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Enfin on sait que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers φ sur $\mathbb{R}^*$, donc sur $[a,b]$. Donc par le théorème de dérivation des suites de fonctions on a φ qui est dérivable en tout point de $[a,b]$, et sa dérivée vaut en particulier en $x \in [a,b]$ $\varphi'(x) = G(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{te^{itx}}{1+t^2}dt$. On a vu aussi que $g = G$ était continue sur $[a,b]$ donc φ est bien C^1 sur $[a,b]$.

On a fait ce travail pour n'importe quel $x \in \mathbb{R}^*$. Donc on a bien le résultat voulu.

4. Montrer que pour $x > 0$

$$\varphi'(x) = i\int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du$$

Correction:

On effectue le changement de variables $tx = u$. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= i\int_0^{+\infty} \frac{\frac{u}{x}e^{iu}}{1+\frac{u^2}{x^2}}\frac{1}{x}du \\ &= i\int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du\end{aligned}$$

5. Montrer que

$$\forall u \in [0,1],\ |e^{iu} - 1| = 2\sin\left(\frac{u}{2}\right)$$

Correction:

On écrit pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}e^{iu} - 1 &= e^{iu/2}(e^{iu/2} - e^{-iu/2}) \\ &= 2i\sin\left(\frac{u}{2}\right)e^{iu/2}\end{aligned}$$

Donc

$$|e^{iu} - 1| = 2|\sin\left(\frac{u}{2}\right)|$$

Or pour $u \in [0,1]$ on a $\sin\left(\frac{u}{2}\right) \geq 0$. D'où le résultat.

6. Déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.
Indication : on pourra décomposer l'intégrale en plusieurs sous-intégrales.

Correction:

On découpe l'intégrale qui définit φ' en trois parties. Soit $0 < x < 1$. On a

$$i\int_0^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du = i\int_0^{x} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du + i\int_x^{1} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du + i\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du \quad (12)$$

On va traiter séparemment chacune des intégrales.
Remarquons que sur $[0,x]$ $\left|\frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}\right| \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Donc

$$\left|i\int_0^{x} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du\right| \leq \frac{x}{x} = 1 \quad (13)$$

D'autre part on a pour $u > 0$

$$\frac{ue^{iu}}{x^2+u^2} = \frac{e^{iu}}{u}\frac{u^2}{u^2+x^2} = \frac{e^{iu}}{u}\left(1 - \frac{x^2}{u^2+x^2}\right) \quad (14)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}du$ est convergente. On le voit à l'aide de l'intégration par partie pour $X > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^{X} \frac{e^{iu}}{u}du &= \left[\frac{e^{iu}}{u}\right]_1^X + \int_1^X \frac{e^{iu}}{u^2}du \\ &= \frac{e^{iX}}{X} - e^i + \int_1^X \frac{e^{iu}}{u^2}du\end{aligned}$$

Or $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{X} = 0$ et $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{e^{iu}}{u^2}du$ existe car cette intégrale est absolument convergente.
Enfin $\left|\frac{e^{iu}}{u}\frac{x^2}{u^2+x^2}\right| \leq x^2\frac{1}{u^3}$ et on a aussi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}du$ qui est une intégrale de Riemann convergente.
Donc d'après (14) et ce qu'on vient de faire

$$\left|i\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du\right| \leq \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u}du\right| + x^2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}du \quad (15)$$

En particulier $i\int_1^{+\infty} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du$ est borné pour $0 < x < 1$.

Enfin pour le terme qu'on n'a pas encore traité on écrit

$$\begin{aligned}i\int_x^{1} \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du &= i\int_x^1 \frac{u(e^{iu}-1)+u}{x^2+u^2}du \\ &= i\int_x^1 \frac{u(e^{iu}-1)}{u^2+x^2}du + i\int_x^1 \frac{u}{u^2+x^2}du\end{aligned}$$

Or on a vu que pour $0 \leq u \leq 1$ $|e^{iu} - 1| = \sin(u/2)$. *Donc pour* $x < u < 1$

$$\begin{aligned} \left| i\frac{u(e^{iu}-1)}{u^2+x^2} \right| &= \frac{2u\sin(u/2)}{u^2+x^2} \\ &\leq \frac{2u\sin(u/2)}{u^2} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'autre part $\displaystyle\int_x^1 \frac{u}{u^2+x^2}du = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x^2) - \ln(2x^2)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x^2) - \ln(2)\Big) - \ln(x)$.

On voit donc que tous les termes dans (12) sont bornés quand $x \to 0$ *sauf celui en* $i\displaystyle\int_x^1 \frac{ue^{iu}}{x^2+u^2}du \sim -i\ln(x)$.

On a donc $\varphi'(x) \sim_{(0)} -i\ln(x)$

7. La fonction est-elle dérivable en 0 ?

Correction:

Considérons le taux d'accroissement de φ *en* 0 *défini pour* $x > 0$ *par* $\tau(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$.

φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *donc en particulier sur l'intervalle* $]0,x[$ *et d'après le théorème des accroissements finis il existe* $\theta_x \in]0,x[$ *tel que*

$$\tau(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(\theta_x)$$

Or pour $x \to 0$ *on a* $\theta_x \to 0$ *car* $0 < \theta_x < x$. *De plus d'après ce qu'on vient de faire dans la question précédente* $|\varphi'(x)| \to +\infty$ *quand* $x \to 0$ *donc* $|\varphi'(\theta_x)| \to +\infty$ *quand* $\theta_x \to 0$.

Donc τ *n'a pas de limite quand* $x \to 0$ *et* φ *n'est pas dérivable en* 0.