Devoir surveillé 2
Durée 1h30

Le sujet comporte une feuille recto-verso. Il est conseillé de le lire intégralement avant de commencer.

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notations et définition (qui ne seront pas redonnés à l'examen!)

Soit f une fonction 2π périodique telle que $\int_0^{2\pi} |f(t)|dt$ existe.

— Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f.

— On appelle série de Fourier d'ordre N pour $N \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto S_N(f)(t) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$.

Exercice 1.

Indiquer si les séries suivantes convergent, en justifiant à chaque fois votre réponse.

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{2^n + 3^n} \qquad S_2 = \sum_{n\geq 2} (\ln(n))^{-n} \qquad S_3 = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Correction rapide :

— On applique le critère par équivalent ou par majoration. En effet $\frac{e^n}{2^n+3^n} \sim \frac{e^n}{3^n}$. Or $\frac{e}{3} < 1$. Donc $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{e^n}{3^n}$ converge (série géométrique) et donc S_1 converge.

— On applique le critère de Cauchy. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n)^{-1} = 0$. Donc S_2 converge.

— On écrit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or $n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n^2\frac{1}{n} = n$ car $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \to 0$.

  Donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$ et la série S_3 ne peut pas converger.

Exercice 2.

Répondre à chaque question posée en donnant toujours une justification à l'aide du cours ou d'un contre-exemple.

1. Si on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge peut-on toujours en déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} nu_n$ converge ?

Correction rapide :
Non !
On prend $u_n = \frac{1}{n^2}$.

2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on suppose que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, peut-on toujours en déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est inférieur ou égal au module de z_0 ?

   Correction rapide :
   Non !

   Par exemple on prend $a_n = 1$ et $z_0 = \frac{1}{2}$. On a le rayon de convergence $R = 1$ pour $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ mais $R > \frac{1}{2}$.

   En réalité on a toujours $R \geq |z_0|$ si $\sum a_n z_0^n$ converge.

Exercice 3.

1. On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n^2+1} z^n$
   (a) Donner le rayon de convergence R de cette série.

   Correction rapide
   On applique le critère de d'Alembert pour les séries entières et on trouve $R = 1$.

   (b) Indiquer si cette série converge pour $z = R$.
   Correction rapide
   On remarque que $\frac{n-1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ et on a donc une série divergente.

2. On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$
   (a) Donner le rayon de convergence R de cette série.
   Correction rapide
   On dit qu'on sait par le cours que cette série a un rayon de convergence $R = +\infty$ ou alors on le recalcule avec le critère de d'Alembert.

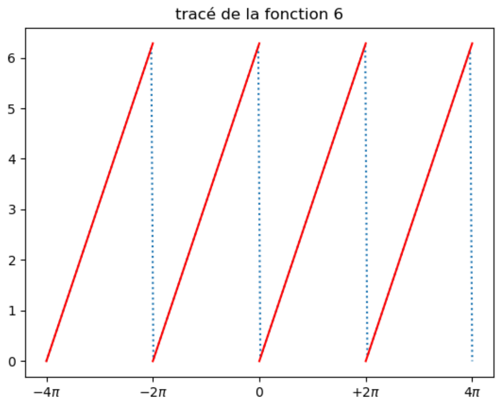
   (b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

   Correction rapide
   On sait par le cours que cette quantité vaut e^z.

Exercice 4.

Soit f la fonction 2π périodique telle que $f(t) = t$ sur $[0,2\pi[$.

1. Donner à l'aide d'un graphique l'allure de f sur $[-4\pi,4\pi[$.



2. A-t-on $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$?

   Correction rapide :
   Oui car $|f(t)| \leq 2\pi$ pour tout $t \in [0{,}2\pi]$ donc $|f(t)|^2 \leq (2\pi)^2$ et donc $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq (2\pi^2)^3 < \infty$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$.

   Correction rapide :
   Pour $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{int} dt &= \left[\frac{e^{int}}{in}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{in2\pi} - e^{i0}}{in} \\
&= \frac{1-1}{in} = 0
\end{aligned}$$

4. Calculer $c_0(f)$ et montrer que $c_n(f) = \frac{i}{n}$ pour $n \neq 0$.

   Correction rapide :

$$\begin{aligned}
c_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^2}{2} = \pi
\end{aligned}$$

On intègre par partie

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[t\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi(-in)}\underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-int}dt}_{=0} \text{ d'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{2\pi(-in)}(2\pi e^{-in2\pi}) = \frac{i}{n}
\end{aligned}$$

5. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé $S_N(f)(t)$ converge et indiquer sa limite selon les valeurs de t.

   Corrigé rapide :
   On applique le théorème de Dirichlet. C'est possible car la fonction est C^1 par morceaux, elle est continue et dérivable sur $]2k\pi,2k\pi + 2\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Et en les points du type $2k\pi$ elle admet une limite à droite et à gauche, et sa dérivée admet une limite à droite et à gauche.

   Donc $S_N(f)(t)$ converge en tout point t vers $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ qui vaut $f(t)$ pour $t \in]2k\pi,2k\pi + 2\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et π si $t = 2k\pi$.

6. En admettant que pour N grand on a $\displaystyle\sum_{k\geq N}\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{N}$ donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2\, dt$ pour N grand.

   Corrigé rapide :
   D'après l'égalité de Parseval on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2\, dt = 2\pi\sum_{|n|>N}|c_n(f)|^2$. Or comme $|c_n(f)|^2 = \frac{1}{n^2}$. Donc comme $\sum_{|n|>N}\frac{1}{n^2} = 2\sum_{n>N}\frac{1}{n^2}$ on a

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2\, dt \sim \frac{4\pi}{N}$$