Partiel traitement du signal

6/03/2018

1

Exercice 1 :

1. On a $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ qui est le produit de

2 fonctions mesurables car on peut écrire

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

donc f est mesurable

de même $x \mapsto x f(x)$ est mesurable.

• D'autre part $0 \leq f(x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc comme $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} < +\infty$

on a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$.

• de plus $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$= \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1 < +\infty$$

donc $x \mapsto x f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. sur $\mathbb{R}_-^*$ $f(x)=0$ donc f est dérivable sur $]-\infty,0[$ (2)

sur $\mathbb{R}_+^*$ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

sur $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

avec $\tilde{f}(x)=f'(x)\,\mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$ qui est mesurable

comme produit de fonctions mesurables.

d'autre part $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\tilde{f}(x)|dx=\int_0^{+\infty}\left|-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right|dx$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$=1<+\infty$$

donc $\tilde{f}\in L^1(\mathbb{R})$.

3. $\displaystyle\hat{\tilde{f}}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(x)e^{-i\omega x}dx$

$$=\int_0^{+\infty}f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\left[f(x)e^{-i\omega x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}i\omega f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$\hat{\tilde{f}}(\omega)=-f(0)+i\omega\hat{f}(\omega)=-1+i\omega\hat{f}(\omega)$$

4. • On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\omega \mapsto f(x)e^{-i\omega x}$ qui est dérivable et sa dérivée

est $-ixf(x)e^{-i\omega x}$

• $\left|-ixf(x)e^{-i\omega x}\right| \leq |xf(x)|$. pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$

Or on a vu dans la première question que

$x \mapsto xf(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe

somme $\omega \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$ est dérivable

et sa dérivée est

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx = -i\int_{0}^{+\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx.$$

5. sur $]0;+\infty[$ on a

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$$

sur $]-\infty;0[$ on a $f'(x) = 0 = -xf(x)$.

6. on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = -x f(x)$$

d'où $\quad f'(x) e^{-i\omega x} = -x f(x) e^{-i\omega x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad f'(x) e^{-i\omega x} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x) = -x f(x) e^{-i\omega x} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$

d'où
$$\int_0^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} \, dx = -\int_0^{+\infty} x f(x) e^{-i\omega x} \, dx$$

or d'après 3. on a
$$\int_0^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} \, dx = -1 + i\omega \hat{f}(\omega)$$

d'après 4. $\displaystyle \int_0^{+\infty} x f(x) e^{-i\omega x} \, dx = \frac{1}{+i} \hat{f}'(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

d'où
$$-1 + i\omega \hat{f}(\omega) = \frac{1}{+i} \hat{f}'(\omega)$$

c'est à dire $\boxed{-i - \omega \hat{f}(\omega) = \hat{f}'(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}}$ (*)

7. $\hat{f}'(\omega) + \omega \hat{f}(\omega) = -i$

on multiplie à droite et à gauche par $e^{\frac{\omega^2}{2}}$

$$e^{\frac{\omega^2}{2}} \hat{f}'(\omega) + \omega e^{\frac{\omega^2}{2}} \hat{f}(\omega) = -i e^{\frac{\omega^2}{2}}$$

or $\left(e^{\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}\right)'(\omega) = e^{\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}'(\omega) + \omega e^{\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}(\omega)$

d'où

$$(**) \quad e^{\frac{\omega^2}{2}}\hat{f}(\omega) = -i\int_0^{\omega} e^{\frac{\omega'^2}{2}}d\omega' + C$$

où C est une constante à déterminer

on a en 0 $\hat{f}(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

or comme $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est paire on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

ce qui donne $\hat{f}(0) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

d'où $e^0\hat{f}(0) = -i \times \int_0^0 e^{\frac{\omega'^2}{2}}d\omega' + C$

d'où $C = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \hat{f}(0)$.

on a donc $\hat{f}(\omega) = -ie^{-\frac{\omega^2}{2}}\int_0^{\omega} e^{\frac{\omega'^2}{2}}d\omega' + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

d'après $(**)$.

d'où on a bien

$$\hat{f}(\omega) = A e^{-\frac{\omega^2}{2}} + B e^{-\frac{\omega^2}{2}} g(\omega) \text{ avec}$$

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } B = -i$$

8. $\hat{f}(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$

d'où $\left| e^{-\frac{\omega^2}{2}} g(\omega) \right| = \left| \operatorname{Im} (\hat{f}(\omega)) \right| \leq |\hat{f}(\omega)| \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $e^{-\frac{\omega^2}{2}} g(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

alors que clairement $g(\omega) \underset{\omega \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 7:

1-a. $\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m k_0}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N$ si $e^{\frac{2i\pi k_0}{N}} = e^{2i\pi k'}$
avec $k_0 = k'N$ pour $k' \in \mathbb{Z}$.

b. Multiplions par $\left(1-e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}\right)\left(1+e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}+e^{\frac{2i\pi k_0}{N}\times 2}+\dots+e^{\frac{2i\pi}{N}k_0(N-1)}\right)$

$$= 1-\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}}+\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}}-\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}}+\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}\times 2}}-\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}e^{\frac{2i\pi k_0}{N}\times 2}}$$
$$+\cancel{e^{3\frac{2i\pi k_0}{N}}}+\dots+e^{\frac{2i\pi}{N}k_0(N-2)}-e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}(N-2)}}+\cancel{e^{\frac{2i\pi k_0}{N}(N-1)}}$$
$$-e^{\frac{2i\pi k_0}{N}\times N}$$
$$= 1-e^{2i\pi k_0} = 0.$$

Or si k_0 n'est pas multiple de N $e^{\frac{2i\pi k_0}{N}} \neq 1$

d'où d'après $\left(1-e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}\right)\left(1+e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}+e^{\frac{2\times 2i\pi k_0}{N}}+\dots+e^{\frac{2i\pi(N-1)k_0}{N}}\right)$
$= 0.$

d'où $1+e^{\frac{2i\pi k_0}{N}}+\dots+e^{\frac{2i\pi(N-1)k_0}{N}} = 0.$

d'où $\sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m k_0}{N}} = 0.$

2. Mq la famille des C_m est orthonormale

On a $\langle C_0, C_m\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \times \frac{\sqrt{2}}{N}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{2N}\right)$
$m \neq 0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{N}\times\sum_{k=0}^{N-1}\frac{e^{i\frac{(2k+1)\pi m}{2N}}+e^{\frac{-i(2k+1)\pi m}{2N}}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{N}\times\frac{e^{\frac{i\pi m}{2N}}}{2}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{i(2k)\pi m}{2N}}+\frac{e^{\frac{-i\pi m}{2N}}}{2}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-\frac{2i\pi k m}{2N}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{N}\times\frac{e^{\frac{i\pi m}{2N}}}{2}\times\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{i\pi k m}{N}}+\frac{e^{-\frac{i\pi m}{2N}}}{2}\sum_{k=0}^{N-1}e^{-\frac{ik\pi m}{N}}$$

$m \neq 0$ $\langle C_0, C_m \rangle = \frac{\sqrt{2}}{N} \times \frac{e^{\frac{i\pi m}{2N}}}{2} \times \frac{1 - e^{\frac{i\pi (N) m}{N}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{N} m}}$

$+ \frac{\sqrt{2}}{N} \times \frac{e^{-\frac{i\pi m}{2N}}}{2} \times \frac{1 - e^{\frac{-i\pi N m}{N}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{N} m}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{N} \times \frac{e^{\frac{i\pi m}{2N}}}{2e^{\frac{i\pi}{2N} m}} \times \frac{1 - (-1)^m}{2i \sin(\frac{\pi}{N} m)}$

$- \frac{\sqrt{2}}{N} \times \frac{e^{-\frac{i\pi m}{2N}}}{2} \times \frac{1}{e^{-\frac{i\pi}{2N} m}} \times \frac{1 - (-1)^m}{2i \sin(\frac{\pi}{N} m)}$

$= 0$.

$m \neq m'$ $\langle C_m, C_{m'} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2}{N} \times \cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2k+1)\pi m'}{2N}\right)$

$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N} (m+m')\right) + \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N} (m-m')\right)\right]$

car $\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$

on a vu grâce au calcul de $\langle C_0, C_m \rangle$ que $\sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{2N}\right) = 0$.

pour tout $m \in \mathbb{N}$

donc on a $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N} (m+m')\right) = 0$

et $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N} (m-m')\right) = 0$.

d'où le résultat.

enfin on a :

$\langle C_0, C_0 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} = 1$

et $\langle C_m, C_m \rangle = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{N}\right)^2$

$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{\ldots}\right)$

$$\langle C_m, C_m\rangle = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi m}{2N}\right)^2$$

$$= \frac{2}{N}\times\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1+\cos\left(\frac{(2k+1)2\pi m}{2N}\right)}{2}$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2} + \frac{1}{N}\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\frac{(2k+1)2\pi m}{2N}\right)}_{=0}$$

$$= 1$$

3. le système des $\{C_m, m=0,\dots,N-1\}$ est 1 système orthonormale de N vecteurs de $\mathbb{R}^N$ donc c'est 1 base de $\mathbb{R}^N$.

Exercice 2 :

1. $\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$

en effet $\hat{\psi}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$: c'est 1 fonction mesurable bornée à support compact et elle est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$.

Donc ψ sa transformée inverse est dans $L^2(\mathbb{R})$ et coïncide avec $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$

on a $\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \times \left[\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{i\omega x} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\omega x} d\omega\right]$

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)} \times \left\{\left[\frac{e^{i\omega x}}{ix}\right]_{-2\pi}^{-\pi} + \left[\frac{e^{i\omega x}}{ix}\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)} \times \left[\frac{e^{-ix\pi} - e^{-ix2\pi}}{ix} + \frac{e^{ix2\pi} - e^{ix\pi}}{ix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi)\,x} \times \left[-2\sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)\right]$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi x}\left[\sin(2\pi x) - \sin(\pi x)\right]$$

on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega x} e^{-i\omega n} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega(x-n)} d\omega = \psi(x-n)$$

2. $\hat{F}(\omega) = \hat{f}(\omega)\, 1_{[\pi, 2\pi]}(\omega) + \hat{f}(\omega - 2\pi)\, 1_{[0,\pi]}(\omega)$ (13)

a) $$\langle \hat{f}, e_n \rangle = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\hat{f}(\omega) e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega + \int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{\hat{f}(\omega) e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\hat{f}(\omega) e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega + \int_{0}^{\pi} \frac{\hat{f}(\omega' - 2\pi) e^{-in(\omega' - 2\pi)}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega'$$

$\omega' = \omega + 2\pi$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{F}(\omega) e^{-in\omega'}}{\sqrt{2\pi}}\, d\omega'$$

$$= \langle \hat{F}, e_n \rangle$$

b) $$\int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\pi}^{2\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + \int_{0}^{\pi} |\hat{f}(\omega - 2\pi)|^2 d\omega$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + \int_{-2\pi}^{-\pi} |\hat{f}(\omega')|^2 d\omega'$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

c) L'espace $\{g \in L^2(\mathbb{R}) : g(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A\}$ est un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$ et c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel on a la famille des $\{e_n 1_A, n \in \mathbb{Z}\}$ qui est une orthonormée dans $\{g \in L^2(\mathbb{R}) : g(x) = 0 \ \forall x \notin A\}$.

en effet $\langle e_n 1_A, e_m 1_A \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-2\pi}^{-\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \right.$

$$+ \left. \int_{\pi}^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{i(n-m)(x'-2\pi)} dx' \right.$$

$$x' = x + 2\pi$$

$$+ \left. \int_{\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{i(n-m)x'} dx' + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x'} dx$$

or on sait par le cours que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est 1 base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$.

donc $\{e_n 1_A, n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormé de E.

d'autre part pour toute fonction $f \in H$ on a qui est à support dans $[0, 2\pi]$ avec $F(\omega) = f(\omega) 1_{[0,\pi]}(\omega) + f(\omega - 2\pi) \times 1_{[\pi, 2\pi]}(\omega)$

(15) et de plus comme $\|\hat{F}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 < +\infty$ on a $\hat{F} \in L^2([0, 2\pi])$

donc comme on sait que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est 1 base hilbertienne

de $L^2([0, 2\pi])$ on a

$$\|\hat{F}\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |\hat{F}(\omega)|^2 d\omega = \sum_{n\in\mathbb{Z}}' |\langle \hat{F}, e_n\rangle|^2$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}' |\langle \hat{f}, e_n\rangle|^2 \text{ d'après 2.a}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}}' |\langle \hat{f}, e_n \mathbb{1}_A\rangle|^2$$

or $\|\hat{F}\|_2^2 = \|\hat{f}\|_2^2$

d'où le système orthonormé $\{e_n \mathbb{1}_A, n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie

l'égalité de Parseval.

Donc c'est 1 base hilbertienne de $\mathcal{E}$

4) on remarque que $\varphi_n(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{+i\omega(x-n)} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega x} \cdot e^{-i\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(\omega)\, e_{-n}(\omega)\, e^{+i\omega x} d\omega$$

or on sait que la famille des $\mathbb{1}_A e_{-n}$ est orthonormée

pour le produit scalaire dans $\mathcal{E}$, donc dans $L^2(\mathbb{R})$.

donc par Plancherel on a

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathbb{1}_A e_{-n}, \mathbb{1}_A e_{-m} \rangle$$

$$= 0 \text{ si } n \neq m$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1$$

d'autre part on a pour tout $f \in P_{w_A}$

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2$$

si $f \in P_{w_A}$ $\hat{f} \in \mathcal{E}$

d'où $\|\hat{f}\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\langle \hat{f}, e_n \mathbb{1}_A \rangle|^2$

par Parseval, vu que $\{e_n \mathbb{1}_A, n \in \mathbb{Z}\}$ est

1 base hilbertienne de $\mathcal{E}$.

d'où par Plancherel $|\langle \hat{f}, e_n \mathbb{1}_A \rangle|^2$

$$= 2\pi |\langle f, (e_n \mathbb{1}_A)^{\vee} \rangle|^2$$

où $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(\omega) \mathbb{1}_A(\omega) e^{i\omega x} d\omega = (e_n \mathbb{1}_A)^{\vee}(x)$

est la transformée inverse de $e_n \mathbb{1}_A$

on a donc $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega} \mathbb{1}_A(\omega) e^{i\omega x} dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(x+n)$$

donc $|\langle \hat{f}, e_n \mathbb{1}_A \rangle|^2 = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} |\langle f, \varphi_{-n} \rangle|^2$

et donc $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}}' |\langle f, \varphi_{-n} \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

donc $\{\varphi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un système orthonormé

qui vérifie l'égalité de Parseval.

C'est donc une base hilbertienne de PW_A.

5. on a vu que pour $f \in PW_A$

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \sqrt{2\pi}\, D_A e_{-n} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-2\pi}^{-\pi} \hat{f}(\omega) e^{+in\omega} d\omega + \int_{\pi}^{2\pi} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{in\omega} d\omega \right]$$

$$= f(n)$$

or vu le support de $\hat{f}$ on devrait avoir 1 fréquence d'échantillonnage deux fois plus rapide si on applique les hypothèses du théorème de Shannon.

en effet $\hat{f}$ est à support dans $[-2\pi, 2\pi]$

d'où d'après Shannon et avec les notations du cours $\Omega_0 = 2\pi$ $\eta = 2$

le théorème nous demande de prendre tous les échantillons $\{f(\frac{n}{2}), n \in \mathbb{Z}\}$ alors qu'ici on peut prendre une cadence deux fois moins rapide.