# Corrigé du Test Intégration et transformée de Fourier. Durée 1h

**Exercice 1**.

Soit $(E,T,m)$ un espace mesuré.
Soient $\alpha \in ]0,1]$ et $1 < p < +\infty$. On considère $A \in T$ tel que $m(A) < +\infty$.

On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de $A$ telle que pour tout $x \in E$ $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.

1. Montrer que si $f$ est une fonction mesurable sur $E$ à valeurs réelles alors

$$\int |f|^\alpha \mathbf{1}_A dm \le \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{\alpha}{p}} (m(A))^{1-\frac{\alpha}{p}}$$

**Correction:**

*Les fonctions $t \mapsto |f(t)|^p$ et $t \mapsto |f(t)|^\alpha \mathbf{1}_A$ sont mesurables comme composées et produit de deux fonctions mesurables.*

*On distingue deux cas.*

— *On suppose que $f$ n'est pas dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. Alors $\int |f|^p dm = +\infty$ donc le membre de droite de l'inégalité recherché est $+\infty$, et l'inégalité est vraie pour toute valeur de $\int |f|^\alpha \mathbf{1}_A dm$*

— *On suppose que $f$ est dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$. On a $0 < \alpha \le 1$ donc $1 < p \le \frac{p}{\alpha}$.*

*Posons $p' = \frac{p}{\alpha}$ et $q'$ tel que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. On prend $F(t) = |f(t)|^\alpha$ et $G(t) = \mathbf{1}_A(t)$. D'après notre hypothèse $F \in \mathcal{L}^{p'}_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ et $G \in \mathcal{L}^{q'}_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ vu que $\int \mathbf{1}_A^\beta dm = \int \mathbf{1}_A dm = m(A) < \infty$ pour tout $\beta > 0$.*

*Donc l'inégalité de Hölder s'applique et on a*

$$\begin{aligned}\int |f|^\alpha \mathbf{1}_A dm = \int FGdm &\le \left(\int F^{p'} dm\right)^{1/p'} \left(\int G^{q'} dm\right)^{1/q'} \\ &\le \left(\int |f|^{\alpha \frac{p}{\alpha}} dm\right)^{\frac{\alpha}{p}} \left(\int \mathbf{1}_A dm\right)^{1-\frac{\alpha}{p}} \\ &\le \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{\alpha}{p}} (m(A))^{1-\frac{\alpha}{p}}\end{aligned}$$

*ce qui est bien l'inégalité voulue.*

2. On suppose que $E$ est de mesure finie. Montrer que si $f$ est une fonction mesurable sur $E$ à valeurs réelles alors

$$\int |f|^\alpha dm \le \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{\alpha}{p}} (m(E))^{1-\frac{\alpha}{p}}$$

**Correction:**

*Il suffit de prendre $E = A$ dans l'inégalité précédente. Comme $\int |f|^\alpha \mathbf{1}_E dm = \int |f|^\alpha dm$, on a le résultat.*

3. En déduire que si $E$ est de mesure finie alors $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.

**Correction:**

*Si $E$ est de mesure finie et $f$ est dans $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ alors il existe un représentant de la classe d'équivalence de $f$ que l'on note encore $f$ tel que $\|f\|_p^p = \int |f|^p dm$. D'après l'inégalité de la question précédente prise pour $\alpha = 1$ on a bien*

$$\int |f| dm \leq \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} (m(E))^{1-\frac{1}{p}}$$

*Donc vu que $m(E)$ est finie et $\int |f|^p dm$ aussi on a bien $\int |f| dm$ finie. Donc $\|f\|_1 = \int |f| dm < \infty$ et donc $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$.*

4. A-t-on $L^p_{\mathbb{R}}(E,T,m) \subset L^1_{\mathbb{R}}(E,T,m)$ si $E$ n'est pas de mesure finie ? Justifiez votre réponse.

**Correction:**

*Prenons le cas de $E = \mathbb{R}$ $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $m = \lambda$.*

*Alors la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)\frac{1}{x}$ est bien dans $L^p(\mathbb{R}) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ pour tout $p > 1$ mais n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}) = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.*

**Exercice 2.**

*On note $\lambda_2$ la mesure de Lebesgue sur $R^2$ muni de sa tribu borélienne $Bor(\mathbb{R}^2)$.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$$

On note pour $n \in \mathbb{N}^*$ $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < n\pi\}$ et $I_n = \int_{D_n} f d\lambda_2 = \int \mathbf{1}_{D_n} f d\lambda_2$.

1. Calculer $I_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Correction:**

*Le domaine $D_n$ est bien un borélien de $\mathbb{R}^2$ car c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. C'est en effet l'image réciproque par l'application continue $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ de l'intervalle $]-\infty, n\pi[$.*

*Donc la fonction $\mathbf{1}_{D_n}$ est mesurable. La fonction $f : (x,y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ étant continue comme composée de fonctions continues est elle aussi mesurable sur $\mathbb{R}^2$. Donc le produit $f\mathbf{1}_{D_n}$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$.*

*D'autre part on a de même $|f|\mathbf{1}_{D_n}$ qui est bien sûr mesurable sur $\mathbb{R}^2$.*

*On calcule d'après le théorème de Tonelli, et le fait que* $|f(x,y)| \leq 1$ *pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\int |f| \mathbf{1}_{D_n} d\lambda_2 = \int \int |f(x,y)| \mathbf{1}_{D_n}(x,y) dx dy$$

*Or le changement de variable défini sur* $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ *par* $\varphi : (r,\theta) \mapsto (x,y)$ *tel que* $\begin{cases} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{cases}$
*est un difféomorphisme de classe* $C^1$*. On a de plus* $J_\varphi(r,\theta) = |\det(D_\varphi(r,\theta)| = r$.

*Cela donne donc, en appliquant ce changement de variable puis le théorème de Tonelli,*

$$\begin{aligned}
\int |f| \mathbf{1}_{D_n} d\lambda_2 &= \int |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \mathbf{1}_{D_n}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r d\lambda_2(r,\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} |\sin(r^2)| \mathbf{1}_{r:r^2<n\pi}(r) r dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin(r^2)| r dr \qquad (1) \\
&\leq 2\pi \int_0^{\sqrt{n\pi}} r dr < \infty
\end{aligned}$$

*Donc* $\int |f| \mathbf{1}_{D_n} d\lambda_2$ *est finie et donc la fonction* $f\mathbf{1}_{D_n}$ *est bien dans* $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$*. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.*

*Cela donne donc avec le même calcul mais cette fois appliqué directement à* $f$

$$\begin{aligned}
\int f \mathbf{1}_{D_n} d\lambda_2 &= \int f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \mathbf{1}_{D_n}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r d\lambda_2(r,\theta) \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{+\infty} \sin(r^2) \mathbf{1}_{r:r^2<n\pi}(r) r dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(r^2) r dr \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(r^2) r dr \\
&= \pi \left[ -\cos(r^2) \right]_0^{\sqrt{n\pi}} \\
&= \pi \left(1 - \cos(n\pi)\right) = \pi(1-(-1)^n)
\end{aligned}$$

2. $f$ est-elle $\lambda_2$-intégrable sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Correction:**

*D'après (1) on a avec le changement de variable dans l'intégrale en variable* $r$ $u = r^2$

$$\begin{aligned}
\int |f| \mathbf{1}_{D_n} d\lambda_2 &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta \int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin(r^2)| r dr \\
&= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{n\pi} |\sin(u)| du
\end{aligned}$$

*Or vu que $f_n = |f|\mathbf{1}_{D_n}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge partout vers $f$, par le théorème de convergence monotone on a*

$$\int |f| d\lambda_2 = \lim_{n\to} \int f_n d\lambda_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\lambda_2$$

*Or $\int f_n d\lambda_2 = \pi \displaystyle\int_0^{n\pi} |\sin(u)| du$ qui n'est pas une suite bornée quand $n \to +\infty$. En effet il suffit de remarquer que $|\sin(u)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $u \in [\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi]$. Donc*

$$\int_0^{n\pi} |\sin(u)| du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{(k+1)\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} du \geq n\pi\frac{\sqrt{2}}{4}$$

*et $\int |f| d\lambda_2$ n'est pas finie. Donc $f$ n'est pas $\lambda_2$-intégrable sur $\mathbb{R}^2$.*