Devoir surveillé 1
Durée 2h

Le sujet comporte une feuille recto-verso.

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Exercice 1. Vrai ou faux

Dire dans chaque cas si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse en donnant toujours une justification à l'aide du cours ou d'un contre-exemple.

1. On suppose que f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   Affirmation :
   $$\text{« Si } \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ converge alors } \int_1^{+\infty} f(t)dt \text{ converge. »}$$
2. On suppose que f est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   Affirmation :
   $$\text{« Si } f(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty \text{ alors } \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge. »}$$
3. On suppose que f est une fonction définie et continue sur $]0,1]$.

   Affirmation :
   $$\text{« Si } f(x) \text{ tend vers } \ell \neq 0 \text{ quand } x \to 0 \text{ alors } \int_0^1 f(t)dt \text{ converge. »}$$
4. On suppose que f est une fonction définie et continue sur $]0,1]$.

   Affirmation :
   $$\text{« Si pour tout } x \in]0,1]\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2} \text{ alors } \int_0^1 f(x)dx \text{ converge. »}$$

Exercice 2.

Indiquer si les intégrales suivantes convergent, en justifiant à chaque fois votre réponse.

$$I_1 = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^2} dx \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} dx$$

Exercice 3.

1. Montrer que $\int_0^1 \ln(x)dx$ converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que $I_1 = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ converge.
3. Soit $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$. A l'aide du changement de variables $u = \frac{1}{x}$ montrer que $I_2 = -I_1$.
4. Donner la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$
5. Soit $X > 0$. Montrer que $\int_0^X \frac{1}{4+t^2}dt = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{X}{2}\right)$.
6. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}dt$.
7. Calculer $J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{4+x^2}dx$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x}{2}$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on peut écrire $\sin^3(t) = a\sin(t) + b\sin(3t)$ où a et b sont des constantes réelles que l'on calculera.
2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)t^2dt$.
3. Indiquer à quelle condition sur $\alpha > 0$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(t)}{t^\alpha}dt$ converge.