Aix-Marseille Université
Anneé Universitaire 2017-2018

Séries et applications
L2 SPI

Devoir surveillé 2
Durée 1h30

Le sujet comporte une feuille recto-verso. Il est conseillé de le lire intégralement avant de commencer.

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés. Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Notations et définition (qui ne seront pas redonnés à l'examen !)

Soit f une fonction 2π périodique telle que $\int_0^{2\pi} |f(t)|dt$ existe.

— Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ le coefficient de Fourier d'ordre n de f.

— On appelle série de Fourier d'ordre N pour $N \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto S_N(f)(t) = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$.

Exercice 1.

Indiquer si les séries suivantes convergent, en justifiant à chaque fois votre réponse.

$$S_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{2^n+3^n} \qquad S_2 = \sum_{n\geq 2} (\ln(n))^{-n} \qquad S_3 = \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

Exercice 2.

Répondre à chaque question posée en donnant toujours une justification à l'aide du cours ou d'un contre-exemple.

1. Si on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels telle que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge peut-on toujours en déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} nu_n$ converge ?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si on suppose que la série $\sum a_n z_0^n$ converge, peut-on toujours en déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est inférieur ou égal au module de z_0 ?

Exercice 3.

1. On considère $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n-1}{n^2+1} z^n$

(a) Donner le rayon de convergence R de cette série.

(b) Indiquer si cette série converge pour $z = R$.

2. On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

   (a) Donner le rayon de convergence R de cette série.

   (b) Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 4.

Soit f la fonction 2π périodique telle que $f(t) = t$ sur $[0,2\pi[$.

1. Donner à l'aide d'un graphique l'allure de f sur $[-4\pi,4\pi[$.
2. A-t-on $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$.
4. Calculer $c_0(f)$ et montrer que $c_n(f) = \frac{i}{n}$ pour $n \neq 0$.
5. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ fixé $S_N(f)(t)$ converge et indiquer sa limite selon les valeurs de t.
6. En admettant que pour N grand on a $\displaystyle\sum_{k\geq N} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{N}$ donner un équivalent de $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) - S_N(f)(t)|^2 \, dt$ pour N grand.