Faculté des Sciences
Aix-Marseille Université

Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☒ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 3h
Examen de : M1 Nom du diplôme : Master de Mathématiques et applications
Code du module : ENSMABU55G Libellé du module : Introduction au traitement numérique des signaux
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Aucun document ni calculatrice ne sont autorisés.
Il est conseillé de lire en entier l'énoncé avant de commencer.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Précisions de notations :

— Soient E, F et G trois espaces vectoriels et $\mathcal{T}_1 : E \to F$, $\mathcal{T}_2 : F \to G$ deux applications définies respectivement sur E et sur F. La fonction $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ est la fonction définie sur E par : pour tout $x \in E$,

$$\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1(x) = \mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(x)).$$

— La notation $\mathbb{1}_A$ indique que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.

— Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$ si $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2 < \infty$. On dit que c'est un signal numérique d'énergie finie.

— Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$ on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$ et $\hat{f}$ est sa transformée de Fourier au sens $L^2(\mathbb{R})$.

— Si deux fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R})$ on note

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt$$

— On rappelle l'identité de Plancherel pour toute fonction f et g dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Exercice 1 (*Transformée de Fourier et base hilbertienne*)

Soit $g = \mathbb{1}_{[-1/2,1/2[}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de g.
2. Calculer la transformée de Fourier de $g_{m,n} : x \mapsto g(x-n)e^{2i\pi mx}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ fixé $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} |\langle f, g_{m,n}\rangle|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(u+n)|^2 du = \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$ pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$.
4. Montrer que le système $\{g_{m,n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
5. **Question bonus, hors barême** : On suppose maintenant que ψ est la fonction dont la transformée de Fourier est $\sqrt{2\pi}g$. On pose $\psi_{m,n} : x \mapsto \psi(x-2\pi n)e^{imx}$. Que peut-on dire de $\{\psi_{m,n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$?
Indication : on pourra commencer par montrer que $\psi_{m,n}$ est la transformée de Fourier inverse de $\sqrt{2\pi}g_{m',n'}$ pour m' et n' à préciser.

Exercice 2 (*Filtre adapté et détection*)

On suppose qu'on dispose d'observations de la forme, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$F_n = Au_n + X_n = z_n + X_n, \tag{1}$$

où

- A est une variable aléatoire réelle de variance finie qui ne dépend pas de n, on note $a = \mathbb{E}(A)$,
- $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est un signal de référence connu, et $z = Au$,
- X est un bruit, modélisé comme un processus aléatoire du second ordre, stationnaire en moyenne d'ordre deux et centré, possédant une densité spectrale $\mathcal{S}_X$ supposée connue,
- A et X_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
- la fonction $\hat{u}/\mathcal{S}_X$ est bornée.

Etant donné un filtre K_h de réponse impulsionnelle h, on note $S_n = (K_h z)_n$ et $Y_n = (K_h X)_n$ les images de Au et X par K_h.

On cherche ici à choisir h pour que en un instant k_0 fixé le rapport signal à bruit soit optimal. En télécommunications ce type de méthodologie est courante lorsque A ne prend que deux valeurs (par exemple $+1$ ou 0) et que le signal a été bruité par exemple lors de sa transmission.

1. Montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un processus aléatoire du second ordre. Calculer $\mathbb{E}(F_n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. Expliciter $\mathbb{E}(S_n)$ en fonction de la Transformée de Fourier à temps discret $\hat{u}$ de u, de $\hat{h}$ celle de h et de a.
3. Expliciter $\mathbb{E}[|Y_n|^2]$ en fonction de la densité spectrale $\mathcal{S}_X$ et de $\hat{h}$, et vérifier qu'elle est indépendante de n.
4. Connaissant u et $\mathcal{S}_X$, on cherche le filtre K_h (donc la réponse impulsionnelle h) tel que le rapport signal à bruit à l'instant $k_0 \in \mathbb{Z}$ fixé
$$\rho[k_0] = \frac{\mathbb{E}(S_{k_0})^2}{\mathbb{E}[|Y_{k_0}|^2]} \tag{2}$$
soit maximal.

   En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donner une borne supérieure $\rho_{opt}[k_0]$ pour $\rho[k_0]$ indépendante de h, et montrer que celle-ci est atteinte pour un $h = h_{opt}$ particulier.

   Expliciter ce dernier en fonction des données du problème (c'est à dire $\hat{u}$, $\mathcal{S}_X$).
5. On suppose dans ce qui suit que $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 c'est à dire $\mathcal{S}_X(\omega) = \sigma^2$ pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$.

   On cherche maintenant h tel que K_h soit un filtre à réponse impulsionnelle finie de taille N fixée tel que $h_k = 0$ pour $k < 0$ et $k > N-1$ et tel que le rapport signal à bruit $\rho[k_0]$ donné en (2) soit maximal.

   (a) Soit $h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tel que $h_k = 0$ pour $k < 0$ et $k > N-1$.
   Montrer que $\mathbb{E}(S_{k_0}) = \dfrac{a}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}(\omega)\widehat{u_N}(\omega)e^{ik_0\omega}d\omega$ où $\widehat{u_N}(\omega) = \displaystyle\sum_{n=-N+1+k_0}^{k_0} u_n e^{-in\omega}$.

   (b) En déduire la réponse fréquentielle du filtre optimal $K_{h_{opt}}$ tel que $\rho[k_0] \leq \rho_{opt}[k_0]$ et tel que sa réponse impulsionnelle $h_{opt} = g$ vérifie les conditions $g_k = 0$ pour $k < 0$ et $k > N-1$.

Exercice 3 (*Codage en sous-bande*)

Pour coder des signaux, on utilise parfois des représentations faisant intervenir deux signaux, dits "sous-bande", obtenus par filtrage (avec des filtres de réponses impulsionnelles bien choisies) et sous-échantillonnage ; si on s'y prend bien, le signal original peut alors être reconstruit à partir des deux signaux sous-bande par sur-échantillonnage, suivi par un filtrage. L'objectif de ce problème est d'étudier cette procédure en utilisant la transformation de Fourier à temps discret.
D'autre part on considère dans ce problème quatre opérateurs de filtrage :

— Un opérateur de filtrage noté $\mathcal{K}$ défini grâce à sa réponse impulsionnelle h. Par définition pour tout x signal numérique d'énergie finie
$$v = \mathcal{K}(x) = h * x$$

— Un opérateur de filtrage noté $\mathcal{L}$ défini grâce à sa réponse impulsionnelle g. Par définition pour tout x signal numérique d'énergie finie
$$w = \mathcal{L}(x) = g * x$$

— Un opérateur de filtrage noté $\mathcal{M}$ défini grâce à sa réponse fréquentielle $\overline{\hat{h}} : \omega \mapsto \overline{\hat{h}(\omega)}$. On note
$$a = \mathcal{M}(x)$$

— Un opérateur de filtrage noté $\mathcal{N}$ défini grâce à sa réponse fréquentielle $\overline{\hat{g}} : \omega \mapsto \overline{\hat{g}(\omega)}$. On note
$$b = \mathcal{N}(x)$$

1. Rappeler combien vaut $\hat{v}(\omega)$ en fonction de $\hat{h}(\omega)$ et $\hat{x}(\omega)$, ainsi que $\hat{w}(\omega)$ en fonction de $\hat{g}(\omega)$ et $\hat{x}(\omega)$.
2. On note $\mathcal{S}$ l'opérateur de sous-échantillonnage qui à un signal d'énergie finie $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ associe
$$s = \mathcal{S}(x) : \; s_n = x_{2n}$$
Montrer que la transformée de Fourier à temps discret du signal s est donnée par la formule
$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{x}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right)$$
3. Les compositions $H = \mathcal{S} \circ \mathcal{K}$ et $G = \mathcal{S} \circ \mathcal{L}$ permettent de calculer
$$\begin{aligned} y = H(x) &= \mathcal{S}(h * x) \\ z = G(x) &= \mathcal{S}(g * x) \end{aligned}$$
Montrer que
$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{2}\left[\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{x}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \hat{h}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\hat{x}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right]$$
et donner de même l'expression de $\hat{z}(\omega)$ en fonction de $\hat{x}$ et $\hat{g}$.
4. On considère maintenant l'opérateur de "suréchantillonnage" $\mathcal{U}$ tel que
$$u = \mathcal{U}(x) : \; \begin{cases} u_{2k} &= x_k \\ u_{2k+1} &= 0 \end{cases}$$
Montrer que $\hat{u}(\omega) = \hat{x}(2\omega)$.
5. Soit $H^\star$ et $G^\star$ tels que $H^\star = \mathcal{M} \circ \mathcal{U}$ et $G^\star = \mathcal{N} \circ \mathcal{U}$.

   Montrer que $\widehat{H^\star(x)}(\omega) = \overline{\hat{h}(\omega)}\hat{x}(2\omega)$ et $\widehat{G^\star(x)}(\omega) = \overline{\hat{g}(\omega)}\hat{x}(2\omega)$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.
6. En déduire que
$$\widehat{H \circ H^\star(x)}(\omega) + \widehat{G \circ G^\star(x)}(\omega) = \frac{1}{2}\left(|\hat{h}(\frac{\omega}{2})|^2 + |\hat{g}(\frac{\omega}{2})|^2 + |\hat{h}(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2 + |\hat{g}(\frac{\omega}{2} + \pi)|^2\right)\hat{x}(\omega)$$
7. Dire à quelle condition sur $\hat{h}$ et $\hat{g}$ on a $H \circ H^\star + G \circ G^\star = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'identité.

   Connaissez-vous des suites h et g qui vérifient cette condition ? Si oui donnez un exemple de telles suites.