Année universitaire 2017/2018

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS

Sujet de : ☒ 1$^{\text{er}}$ semestre ☐ 2$^{\text{ème}}$ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h

Examen de : L2 Nom du diplôme : Licence MIASH

Code du module : SMH201 Libellé du module : Probabilités continues

Calculatrices autorisées : OUI Documents autorisés : OUI, une feuille A4 recto verso

---

Exercice 1.

On considère une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Évaluer la constante c pour que f soit une densité de probabilité. Représenter f.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 0.5)$, $\mathbb{P}(|X| \leqslant 0.5)$.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.
5. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
6. A l'aide de l'inégalité de Tschebyshev trouver $a > 0$ pour que $\mathbb{P}(|Y-1| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1]$, c'est à dire que X est une variable à densité f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère $Y = -\frac{\ln(X)}{2}$. Montrer que la loi de Y est une loi exponentielle de paramètre 2 et calculer la densité de Y.

Exercice 3.

Soit (X,Y) un vecteur gaussien $\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Donner la loi de la variable $2X - 3Y$.
2. Donner la loi jointe des variables $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

Exercice 4.

Le poids X des garçons de 6 ans suit une loi normale d'espérance $m = 20$ kg et de variance $\sigma^2 = 2^2$.

1. Quelle est la probabilité qu'un garçon de 6 ans pèse plus de 24 kg, moins de 19 kg ? Entre 19 et 24 kg ?
2. Donner un intervalle centré en m du type $[m-t,m+t]$ dans lequel le poids d'un garçon de 6 ans a 99 % de chance de se trouver.

Exercice 5.

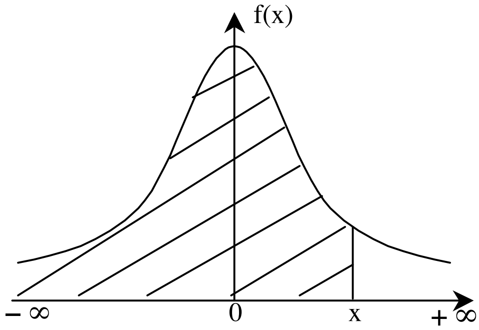
On considère un couple de variables aléatoires continues (X,Y) dont la densité jointe est donnée par

$$f(x,y)=\begin{cases} kx^2ye^{-x-y}, \text{ si } (x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Évaluer la constante k pour que f soit une densité de probabilité.
2. Calculer les densités marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elle indépendantes ?
4. Calculer la covariance de X et de Y et commenter.

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921