Indications et résultats des calculs pour les exercices de la fiche series_revision.pdf : séries, séries entières, séries de Fourier

Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes

(1) converge	(2) converge	(3) converge
(4) converge	(5) converge	(6) converge
(7) converge	(8) diverge	(9) diverge
(10) converge	(11) converge	(12) converge
(13) converge	(14) diverge	(15) converge

Exercice 2.

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indiquer en fonction de α si les séries suivantes convergent absolument en distinguant selon les valeurs du paramètre α.

$$(1) \sum_{n\geq 0} 2^{-n} e^{in\alpha} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2 \sin^{2n}(\alpha)} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3\alpha}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} e^{n(\alpha-n)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} ne^{-n\alpha} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^2+n}{n^2}$$

Indication générale : ne pas oublier qu'on peut écrire $n^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$.

1. converge pour tout α dans $\mathbb{R}$.
2. le terme général n'est pas défini pour $\alpha = 0(\pi)$.
   diverge pour toute valeur de α.
3. converge pour tout $\alpha \neq 0$ et diverge pour $\alpha = 0$.
4. converge pour toute valeur de α dans $\mathbb{R}$.
5. converge pour $\alpha > 0$ et diverge pour $\alpha \leq 0$.
6. diverge pour toute valeur de α.

Séries entières

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(1)\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}\qquad (2)\sum_{n\geq 1}n^n z^n\qquad (3)\sum_{n\geq 1}z^{2n}$$

$$(4)\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}z^n\qquad (5)\sum_{n\geq 1}n(n-1)z^n\qquad (6)\sum_{n\geq 0}\frac{2^n-3^n}{5^n}z^n$$

1. $R = 1$
2. $R = 0$
3. $R = 1$
4. $R = 1$.
5. $R = 1$.
6. $R = 5/3$. *Indication :* on peut étudier la convergence absolue de la série entière en la voyant comme une série numérique qui dépend d'un paramètre.

Exercice 4.

$R = 1$. La série diverge pour $z = R$.

Exercice 5.

$R = 1$. La série diverge pour $z = R$.

Exercice 6.

$R = 1$. La série diverge pour $z = R$.

Exercice 7.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de f est l'intervalle $[-1,1]$

Exercice 8.

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition de f est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier car le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n!}x^n$ est $R = +\infty$.

Exercice 9.

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{1-x} \qquad (E)$$

Soit y une solution développable en série entière de (E) qu'on écrit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Montrer que les b_n vérifient l'équation récurrente $(n+1)b_{n+1} - (n+2)b_n = 0$. En déduire b_n en fonction de n.

   Indication : écrire d'abord l'équation $(1-x)y'(x) = 2y(x)$ et utiliser le fait que $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$.
2. Montrer que $y(x) = \frac{K}{(1-x)^2}$ pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 10.

$$\int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \text{ pour } |x| < 1.$$

Séries de Fourier

Dans toute cette partie on considérera des fonctions $T = 2\pi$ périodiques. Les coefficients de Fourier s'écriront donc

— pour $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-int\frac{2\pi}{T}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt$.
— pour $n \geq 1$ $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(nt\frac{2\pi}{T})dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$
— pour $n \geq 0$ $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(nt\frac{2\pi}{T})dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$
— $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

La série de Fourier d'ordre N de f s'écrit donc $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}$ ou $S_N(f)(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nt) + \sum_{n=0}^{N} b_n(f)\sin(nt)$

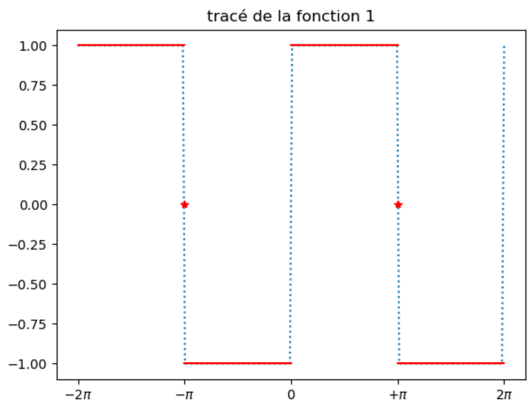
Exercice 11.

Pour chacune des fonctions 2π périodiques suivantes
— Tracer le graphe de la fonction f pour t dans $[-2\pi,2\pi]$.
— Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ est finie.
— Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa série de Fourier.
— A t fixé $S_N(f)(t)$ converge-t-elle vers une limite quand $N \to +\infty$ et laquelle ?
— *Pour les étudiants de St-Jérôme :* la série de Fourier de f converge-t-elle en énergie ?

On étudiera donc les fonctions f suivantes

1. f est impaire, 2π périodique et vaut 1 si $0 \leq t < \pi$ et $f(\pi) = 0$.
2. f est 2π périodique et vaut $|t|$ sur $[-\pi,\pi[$.
3. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[0,2\pi[$.
4. f est 2π périodique et vaut t^2 sur $[-\pi,\pi[$.
5. f est 2π périodique et vaut $|\sin(t)|$ sur $[-\pi,\pi[$.

1. On étudie donc le cas f est impaire, 2π périodique et vaut 1 si $0 \leq t < \pi$ et $f(\pi) = 0$.



   (a)
   (b) Remarquer que la fonction est bornée et conclure.
   (c) On choisit comme intervalle d'intégration $[-\pi,\pi]$ vu que la formule pour définir la fonction est donnée sur cet intervalle. On a vu que f est impaire

$$c_0(f) = a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$$

$$c_n(f) = \frac{1}{in\pi}\left(1 - (-1)^n\right)$$

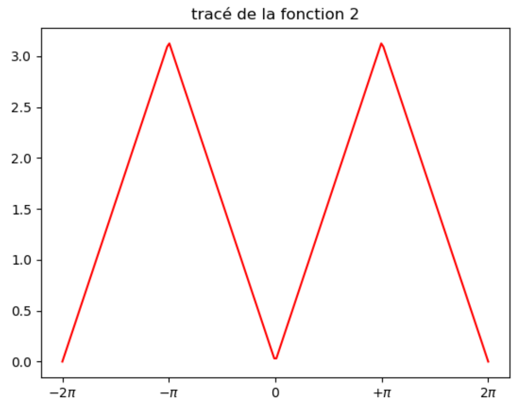
   on rappelle que $e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$ de même que $e^{-in\pi} = (e^{-i\pi})^n = (-1)^n$.

   On a aussi $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$. Donc

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{in\pi}\left(1 - (-1)^n\right)e^{int} = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right)\sin(nt).$$

   (d) Ici le théorème de Dirichlet s'applique.
   (e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier converge en énergie.

2. On étudie f 2π périodique et qui vaut $|t|$ sur $[-\pi,\pi[$.



(a) avec Python

(b) Remarquer que la fonction f est bornée.

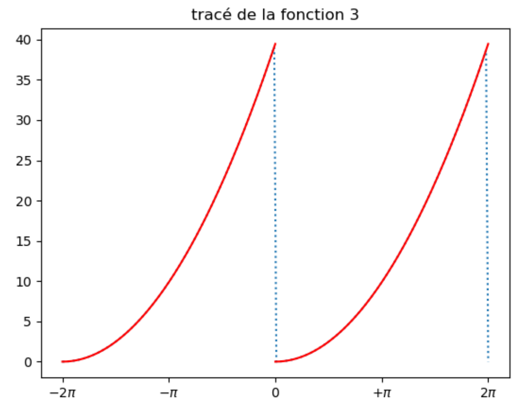
(c) On choisit comme intervalle d'intégration $[-\pi,\pi]$ vu que la formule pour définir la fonction est donnée sur cet intervalle. On a vu que f est paire On a ensuite pour $n \neq 0$ et en intégrant par partie on obtient $c_n(f) = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$ ou $a_n(f) = 2\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$ et $b_n(f) = 0$.

Donc $S_N(f)(t) = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} e^{int} = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{n=1}^{N} 2\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} \cos(nt)$.

(d) Ici le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

3. On étudie f 2π périodique qui vaut t^2 sur $[0,2\pi[$.



(a) avec Python

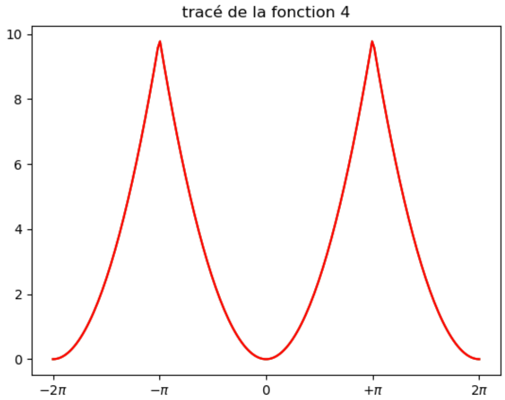
(b) Remarquer que la fonction f est bornée.

(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{4\pi^2}{3}$ et $c_n(f) = \frac{2}{n^2} + \frac{2i\pi}{n}$.
$a_n(f) = \frac{4}{n^2}$ et $b_n(f) = -\frac{4\pi}{n}$.

(d) Ici le théorème de Dirichlet s'applique

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge en énergie.

4. On étudie f 2π périodique qui vaut t^2 sur $[-\pi,\pi[$.



(a) avec Python

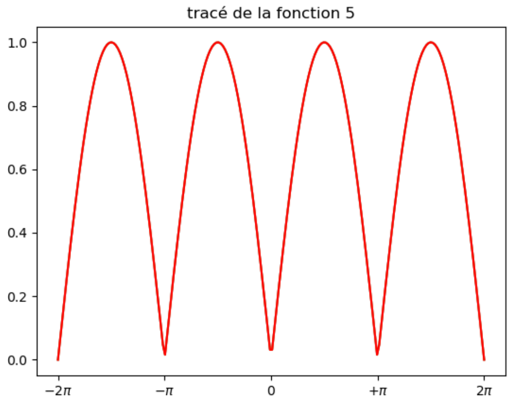
(b) Remarquer que la fonction f est bornée.

(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{\pi^2}{3}$ et $c_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$.
$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ et $b_n(f) = 0$.

(d) Ici le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

5. On étudie la fonction f qui est 2π périodique et vaut $|\sin(t)|$ sur $[-\pi,\pi[$.



(a) Avec Python

(b) Remarquer que la fonction f est bornée

(c) $c_0(f) = a_0(f) = \frac{2}{\pi}$.
$c_1(f) = 0 = c_{-1}(f)$ et $c_n(f) = -\frac{((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}$ pour $|n| > 1$.

$a_1(f) = 0$ et pour $n > 1$ $a_n(f) = -\frac{2((-1)^n+1)}{\pi(n^2-1)}$ et $b_n(f) = 0$.

(d) Ici le théorème de Dirichlet s'applique et on a $S_N(f)(t)$ qui converge vers $f(t)$ en tout point t.

(e) La fonction f a une énergie finie donc la série de Fourier de f converge vers f en énergie.

Exercice 12.

— pour f_3 on doit vérifier pour répondre à cette question si $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{|\sin(t)|}}\right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{|\sin(t)|}} dt$ existe, ce qui est le cas.

— Pour f_4 il se trouve que sa série de Fourier n'existe pas, et donc il n'est pas question de parler de coefficients de Fourier ni d'égalité de Parseval.